د. مجيد الكرخي

التحليل الكمي الاقتصادي

2
العلاقات غير الخطية - التفاضل

بسم الله الرحمن الرحيم

التحليل الكمي الاقتصادي

الجزء الثاني

العلاقات غير الخطية – التفاضل

الطبعة الأولى

١٤٣٤هـ - ٢٠١٤م

دار المناهج للنشر والتوزيع

عمان، شارع الملك حسين، بناية الشركة المتحدة للتأمين

هاتف4650624 465 فاكس 4650664 6 9626+

ص.ب 215308 عمان 11122 الأردن

Dar Al-Manahej
Publishers & Distributor

Amman-King Hussein St.
Tel 4650624 fax +9626 4650664
P.O.Box: 215308 Amman 11122 Jordan
www.daralmanahej.com
info@daralmanahej.com
manahej9@hotmail.com

التحليل الكمي

الاقتصادي

العلاقات غير الخطية - التفاضيل

تأليف

د. مجيد الكرخي

المملكة الأردنية الهاشمية

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية 2009/10/4478

330 ،1

الكرخي مجيد جعفر / التحليل الكمي الاقتصادي / مجيد جعفر الكرخي

عمان دار المناهج للنشر والتوزيع 2010

ر.إ 2009/10/4478

المواصفات: الاقتصاد/ التحليل الكمي

المحتويات

الفصل الأول

التحليل الرياضي للمنحنيات غير الخطية

الفصل الثاني

الدوال الاقتصادية غير الخطية

الفصل الثالث

المنحنيات المثلثية

٣-٤ إشارات دلالة المثلثية ٩٠
٣-٥ النظام الإحداثي القطبي ٩١
٣-٦ التطبيقات الاقتصادية للمنحنيات المثلثية ١٠٠

الفصل الرابع

حساب التفاضل

٤-١ مقدمة ١٠٥
٤-٢ أنواع الدوال ١٠٦
أ. الدالة الصريحة والدالة الضمنية ١٠٧
ب. الدالة العكسية ١٠٨
جـ. الدالة الوحيدة القيمة والدالة المتعددة القيم ١٠٩
د. الدالة المتزايدة والدالة المتناقصة ١٠٩
هـ. الدالة المتعددة المتغيرات ١١٠
٤-٣ النهايات ١١١
٤-٤ الاستمرارية ١٢٠
٤-٥ المشتقة ١٢٩
٤-٦ معدل تغير الدالة ١٣٣
٤-٧ قواعد التفاضل ١٣٤
٤-٨ المشتقات ذات الدرجة العليا ١٥٨
٤-٩ الدوال المتزايدة والمتناقصة ١٦١
٤-١٠ النهايات العظمى والصغرى النسبية ١٦٣
٤-١١ التقعر والتحدب ١٦٥
٤-١٢ نقطة الانقلاب ١٦٧

٤-١٣ حالات معينة في نقاط الانقلاب والنهاية العظمى والصغرى ١٧٢

٤-١٤ التفاضل في الدوال ذات الأكثر من متغير ١٧٥

الفصل الخامس

التفاضل وتطبيقاته الاقتصادية

٥-١ مقدمة ٢٠٣

أولاً: نظرية المنفعة ٢٠٣

٥-٢ دالة المنفعة ٢٠٣

٥-٣ تعظيم الإشباع ٢٠٨

ثانياً: في نظرية الطلب ٢١٥

٥-٤ دالة الطلب ٢١٥

٥-٥ العائدات الكلية والعائد الحدي ٢١٦

٥-٦ العائدات الحدية في حالة الاحتكار والمنافسة ٢٢٠

٥-٧ مرونات الطلب ٢٢١

ثالثاً: في نظرية التكاليف ٢٤٣

٥-٨ مقدمة ٢٤٣

٥-٩ دالة التكاليف في المدى القصير ٢٤٥

٥-١٠ متوسط التكاليف ٢٤٦

٥-١١ التكاليف الحديقة ٢٤٩

٥-١٢ التكاليف الحدية ومتوسط التكاليف ٢٥٠

٥-١٣ تعظيم الأرباح ودلتا التكاليف والطلب ٢٥٩

٥-١٤ دالة التكاليف في المدى الطويل ٢٦٥

٥-١٥ التكاليف في المدى الطويل ودالة الإنتاج ٢٦٨

رابعاً: في نظرية الإنتاج ٢٧٤
٥-١٦ إدارة الإنتاج ٢٧٤
٥-١٧ الدالة المتجانسة ٢٧٦
٥-١٨ الدالة المتجانسة وقاعدة أويلر ٢٨٠
٥-١٩ الدالة المتجانسة وحجم الغله ٢٨٦
٥-٢٠ منحنيات الإنتاجية ٢٨٨
٥-٢١ درجة التكامل والاحلال بين عوامل الإنتاج ٢٩٨
٥-٢٢ المعدل الحدي للإحلال الفني ٣٠١
٥-٢٣ مرونة الإحلال بين عوامل الإنتاج ٣٠٦
٥-٢٤ بعض دوال الإنتاج الشائعة ٣١١
٥-٢٥ الكفاءة الاقتصادية ٣١٨
٥-٢٦ تعظيم الأرباح عند المنتج المتنافس ٣٢١
٥-٢٧ الكفاءة الفنية ٣٢٧
٥-٢٨ تعظيم العائد وحدود إمكانية الإنتاج ٣٢٨

مقدمة

تقدم التحليلات الكمية لمجمل الظواهر الاقتصادية وصفا دقيقا للمشكلة إذا ما أحكمت متطلباتها ابتداءً من مضبوطية البيانات المستخدمة وصولا إلى حسن الأسلوب التحليلي ومن ثم مدى قدرة متخذ القرارات في توظيف الاستنتاجات المستخلصة .

لقد برزت أهمية التحليلات الكمية في علم الاقتصاد منذ بضعة قرون ولكنها تبلورت وتعمقت خلال القرن الماضي وخاصة الرياضية والإحصائية منها ولهذا صار من الضروري على دارسي علم الاقتصاد والمهتمين بالشؤون الاقتصادية إيلاء التحليلات الكمية المذكورة اهتماماً خاصاً حيث لم تعد المقالات الوصفية البحتة التي تقوم على سرد غير موثق بالمعلومات والوسائل الكمية قادرة على الإحاطة بطبيعة الظاهرة وعناصرها وقوانين حركتها تمهيدا لمعرفة اتجاهاتها والمؤثرات التي تتحكم بها.

وقد حاولنا في هذا الكتاب أن نقدم شيئا من التحليلات الكمية الاقتصادية بأسلوبها الرياضي المبسط ومن هنا جاءت تسمية الكتاب (بالتحليل الكمي الاقتصادي) تلك التسمية التي اشتقت من (الكم ولكمية)والتي تعني كما يفهمها القارئ الكريم استخدام الشروح الكمية (الرياضية) للعلاقات والتشابكات الاقتصادية سواء ما يتعلق بها بالاقتصاد الكلي أو الاقتصاد الجزئي .. ولم تكن أمامنا فرصة التوسع الكثير في هذا المجال لان الوسيلة والغاية كانتا متلازمتين عند دراسة موضوع كهذا فلم نتمكن الدخول إلى التكميم مباشرة بسبب الحاجة لاستكمال جوانب من

المعرفة الرياضية لدى البعض من الإداريين والباحثين المبتدئين كما لم نتمكن من الأطناب في شرح التحليلات الرياضية البحثية خوفا من تحول الموضوع إلى كتاب في الرياضيات ولهذا سعينا التوفق بين الحاجتين والموازنة بينهما واعتمدنا أسلوب نتمنى أن يرضى القارئ وذلك باستعراض التحليل الرياضي أولا ومن ثم عرض التطبيقات الاقتصادية الكمية بعدئذ أي قدمنا الوسيلة الرياضية كي تكون مفهومة عند استخدامها في التكميم الاقتصادي اللاحق .

وقد حرصنا على أن تكون التحليلات الرياضية متدرجة فبدأنا بالمبادئ الأولية والعلاقات الخطية والتي شملت الدول الخطية والمصفوفات وجداول المستخدم المنتج والبرمجة الخطية والتي احتواها الجزء الأول من الكتاب أما العلاقات غير الخطية والتي شملت الدول غير الخطية ومبادئ التفاضل والتكامل والمعادلات التفاضلية ومعادلات الفروق فقد وضعت في الجزء الثاني .

والنقطة الأخرى التي راعيناها هي الابتعاد عن التحليلات الرياضية المعقدة والاتجاه نحو التبسيط والاستعانة بالشروح التوضيحية الضرورية لخلق حالة الفهم التي يرجوها القارئ الذي لم يسبق له دراسة الرياضيات العامة كما لجأنا في سبيل تحقيق ذلك إلى مزيد من الأمثلة التي نراها الوسيلة الأكثر فائدة في تحقيق حالة الفهم المذكورة فهي إحدى وسائل التعلم عن طريق العمل التي أثبتت جداولها في المجالات التعليمية .

وبعد كل فصل رياضي عرضنا بعض القضايا الاقتصادية الأكثر شيوعا مستعينين في عرضها بالتحليلات الرياضية التي سبقتها وهكذا تصاعدت عملية العرض والتحليل فبدأنا بالعلاقات الاقتصادية البسيطة التي يمكن أن تشكل دالة خطية وبينا كيفية تمثيلها بالرسم البياني ومن ثم حلها رياضيا وصولا لتحديد الكميات الاقتصادية من

عرض وطلب وتكاليف وإنتاج واستهلاك وصادرات واستيراد ونقاط تعادل وغيرها . ثم انتقلنا بعدئذ إلى الدول الاقتصادية غير الخطية أو ما يسمى بالمنحنيات وهي الصورة الأخرى للدول الاقتصادية الخطية ومن ثم تعرضنا للتفاضل والتكامل وتطبيقاتهما في التحليلات الكمية الاقتصادية ذات العلاقة بالاقتصاد الكلي أو في نماذج النمو الاقتصادي وغيرها ، كذلك الحال بالنسبة لمعادلات الفروق التي استخدمت في عرض بعض النماذج الرياضية أيضا. أما المصفوفات الجبرية فقد استخدمت في تحليلات المستخدم - المنتج واستعمالاته في عرض التشابك الاقتصادي والتنبوء في المتغيرات الاقتصادية الكلية في حسابات الدخل القومي كذلك استخدمت المصفوفات في شرح البرمجة الخطية وحلولها واستخداماتها الاقتصادية .

ونحن إذ تغمرنا السعادة في تقديمنا شيئا متواضعا في مجال الاقتصاد الكمي نشعر في نفس الوقت بأن هناك مجالات رحبة كثيرة في هذا الموضوع لم يسعفنا الحظ في التطرق إليها كما نلتمس العذر عن أي سهو أو خطأ حدث دون أن نلتفت إليه تاركين للقارئ اللبيب أمر تصحيحه وكم نكون ممتنين لو نبهنا عنه لا مكان تلافيه في الطبعات اللاحقة . شاكرين اللـه سبحانه وتعالى الذي وفقنا على وضع هذا الكتاب فله الفضل كله وبه نستعين.

المؤلف

الفصل الأول

التحليل الرياضي للمنحنيات غير الخطية

التحليل الرياضي للمنحنيات غير الخطية

١ـ١ مقدمة

تعرفنا من الجزء الأول من هذا الكتاب على خصائص رسم الخط المستقيم الذي يبدو سهلا " نسبيا " مقارنة برسم المنحنى (غير الخطي) حيث لا تتطلب عملية رسم الخط سوى تحديد موقع نقطتين على المستوى. أما رسم المنحنى فيتطلب تحديد موقع المزيد من النقاط إلا أن الوقوف على خصائص المنحنى من خلال تفحص معادلته يساعد كثيرا على اختصار عدد النقاط المطلوبة وفي هذا الفصل نتعرف على هذه الخصائص وأنواع المنحنيات ومن ثم تطبيقها في مجال علم الاقتصاد.

١ـ٢ خصائص المنحنيات

تتميز المنحنيات بالخصائص الآتية:

أ- الأجزاء المحصورة **Intercepts**

الأجزاء المحصورة للمنحنى هي النقاط التي عندها يقطع المنحنى المحورين فالجزء المحصور-X تستخرج قيمته بجعل قيمة **Y=0** في معادلة المنحنى وحل المعادلة لاستخراج قيمة **X**. وكذلك الحال بالنسبة للجزء المحصور-Y فنستخرج قيمته بجعل قيمة **X=0** ومن ثم حل المعادلة للحصول على قيمة **Y**.

ب- التناظر (التماثل) **Symmetry**

تعتبر أية نقطتين بالنسبة لخط معين متناظرتين إذا كان ذلك الخط هو العمود المنصف لقطعة الخط الموصلة بين النقطتين. أما تناظر نقطتين بالنسبة لنقطة ثالثة فيتحقق في حالة كون النقطة الثالثة هي النقطة المنصفة لقطعة الخط الموصلة بين النقطتين ومن هذا المفهوم نستنتج ما يأتي:

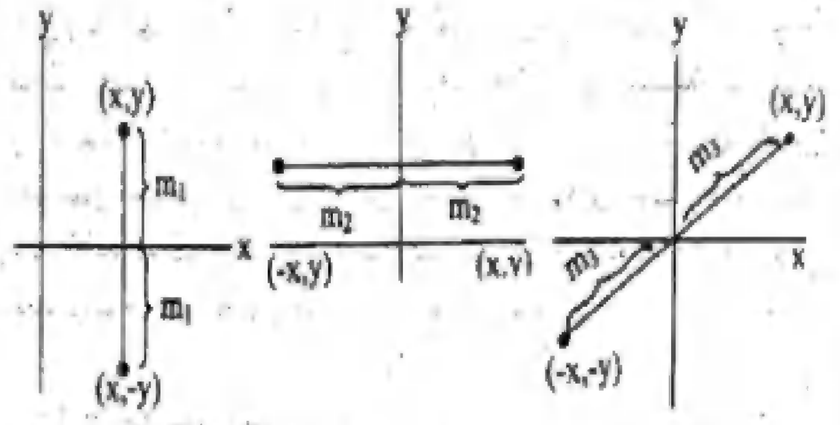
تكون النقطة(x,y) متناظرة مع النقاط التالية حسبما مبين:

١- مع النقطة (x,-y) بالنسبة للمحور x.

٢- مع النقطة (-x , y) بالنسبة للمحور y.

٣- مع النقطة (-x , -y) بالنسبة لنقطة الأصل.

كما في الشكل (1-1) أدناه:



حالات التناظر

(a) للمحور -x (b) للمحور -y (c) لنقطة الاصل

شكل رقم (1-1)

أما تناظر المنحنى فيظهر كما الشكل (1-2) وحسب القواعد الآتية:

يكون منحنى معادلة مثل $f(x,y)=0$ متناظراً مع ما يأتي:

- مع المحور x إذا كانت $f(x,y)=f(x,-y)=0$
- مع المحور y إذا كانت $f(x,y)=f(-x,y)=0$ (1-1)
- مع نقطة الأصل إذا كانت $f(x,y)=f(-x,-y)=0$

ويلاحظ أن التناظر مع كلا المحورين (x ,y) يتضمن تناظراً مع نقطة الأصل. ولكن التناظر مع نقطة الأصل لا يتضمن تناظراً مع أي من المحورين. وبشكل عام فإن التناظر مع حالتين من حالات التناظر الثلاثة أعلاه يتضمن تناظراً مع الحالة الثالثة لذلك يمكن أن يظهر التناظر مع حالة واحدة أو مع الحالات الثلاثة أو لا يظهر كلية مع جميع الحالات كما لا يظهر مطلقاً مع حالتين فقط وهذا يتطابق مع التعريف أعلاه كما يأتي:

أ- حالة التناظر مع المحور X:

عند تعويض (-y) بـ (y) لا يغير هذا التعويض المعادلة.

ب- حالة التناظر مع المحور Y:

عند تعويض (x-) بـ (x) لا يغير هذا التعويض المعادلة.

ج- حالة التناظر مع نقطة الأصل:

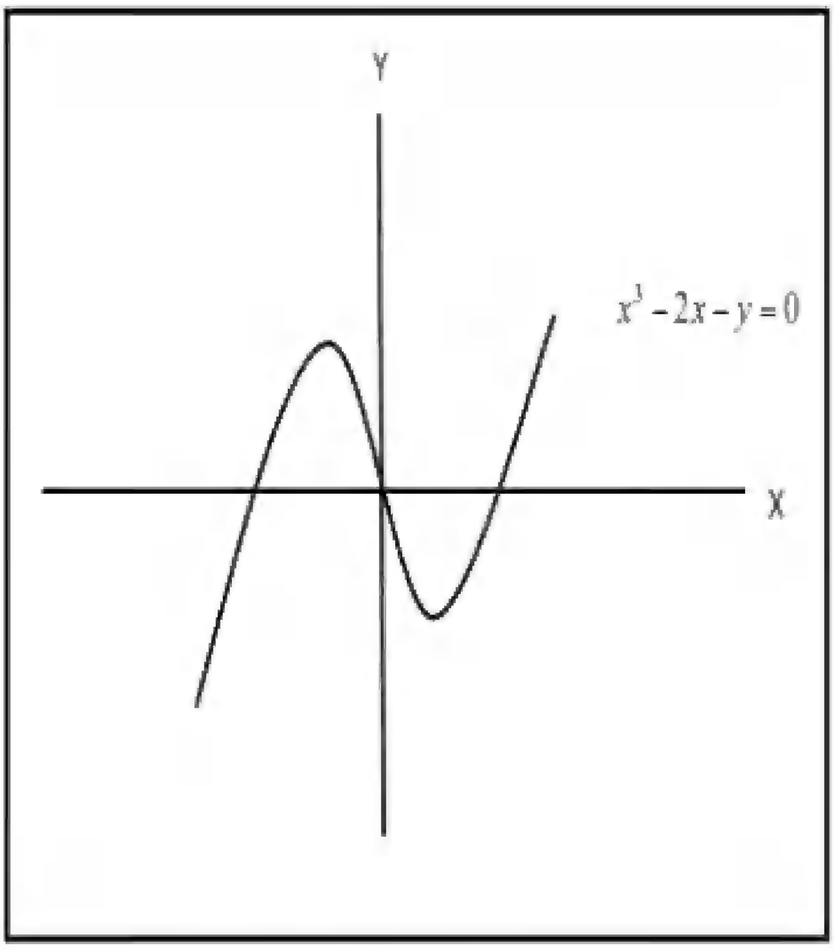
عند تعويض (x-) بـ (x) و (y-) بـ (y) لا يغير هذا التعويض المعادلة.

أمثلة

مثال (١):

بين بأن المنحنى الذي تمثله المعادلة الآتية متناظر مع نقطة الأصل:

$$x^3 - 2x - y = 0$$



شكل رقم (٢-١)

حيث أن: $f(x,y) = x^3 - 2x - y = 0$

لذلك فأن: $f(-x,-y) = (-x^3) - 2(-x) - (-y) = 0$

$$-x^3 + 2x + y = 0$$

حيث يمكن إعادة كتابتها بالشكل التالي: $x^3 - 2x - y = 0$ بعد تغيير الإشارات ويظهر بأن:

$f(-x,-y) = 0$. هي نفس المعادلة $f(x,y) = 0$

ولهذا فإن $f(x,y) = 0$ متناظرة مع الأصل ولكنها غير متناظرة مع كلا المحورين بسبب ما يأتي:

$$f(x,-y) = x^3 - 2x + y$$

وهذا يبين بأن $f(x,-y) = 0$ هي غير المعادلة $f(x,y) = 0$ ومن ذلك نستنتج بأن

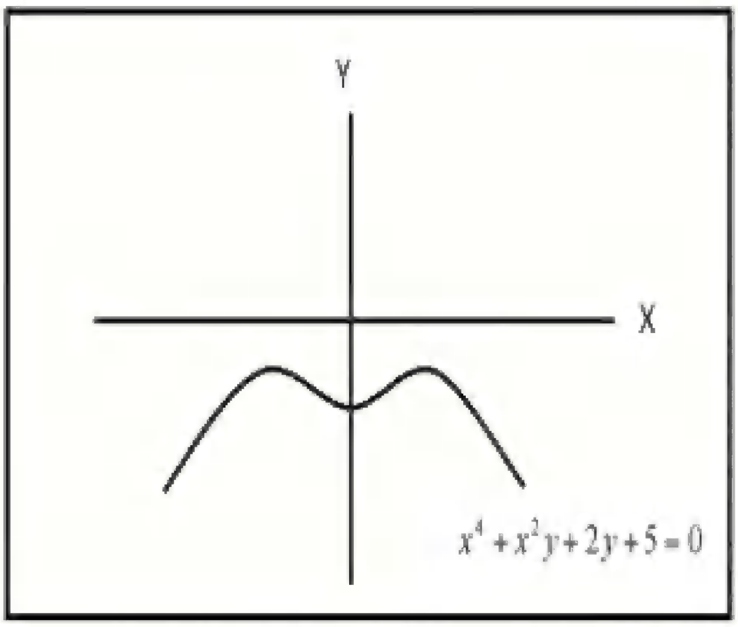
$f(x,y) = 0$ غير متناظرة مع المحور x وكذلك:

$f(-x,y) = -x^3 + 2x - y$ هي ليست نفس المعادلة $f(x,y) = 0$ ولهذا فإن

$f(x,y) = 0$ غير متناظرة مع المحور -y. كما مبين في الشكل رقم (1-2).

<u>مثال (٢)</u>

بين بأن المنحنى الذي تمثله المعادلة الآتية متناظر مع المحور -y وليس مع المحور -x أو نقطة الأصل: $x^4 + x^2y + 2y + 5 = 0$



شكل رقم (٣-١)

وذلك لان: $f(x,-y) = x^4 - x^2y - 2y + 5$ ولهذا فأن:

$f(x,-y) = 0$ ليست نفس المعادلة $f(x,y) = 0$

ونستنتج بأن $f(x,y) = 0$ ليست متناظرة مع المحور x ولكن:

$$f(-x,y)=(-x)^4+(-x)^2y+2y+5$$

$f(x,y)=0$ هي نفس المعادلة $=x^4+x^2y+y+5$

وبذلك فإن $f(x,y)=0$ متناظرة مع المحورy

أما $f(-x,-y)=(-x)^4+(-x)(-y)+(-2y)+5$

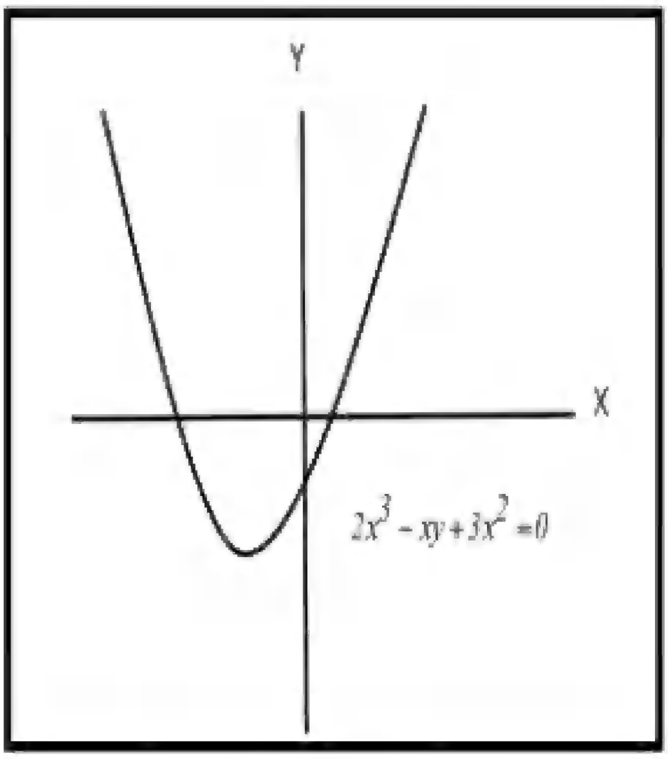
وبذلك فإن: $f(x,y)=0$ هي ليست نفس المعادلة $=x^4-x^2y-2y+5$

$f(x,y)=0$ ليست متناظرة مع نقطة الأصل.كما مبين في الشكل رقم (1-3).

<u>مثال (٣)</u>

بين أن المنحنى الذي تمثله المعادلة الآتية هو ليس متماثلاً مع أي من المحورين أو نقطة الأصل شكل رقم (1-4):

$$2x^3-xy+3x^2=0$$



شكل رقم (٤-١)

وذلك لأن:

$$f(x,-y)=2x^3-x(-y)+3x^2=2x^3+xy+3x^2$$

ولهذا فإن: $f(x,-y)=0$ هي ليست نفس المعادلة $f(x,y)=0$

فهي ليست متناظرة مع المحور x وان:

$$f(-x, y) = -2x^3 + xy + 3x^2$$

هي ليست المعادلة $f(x, y) = 0$ وبذلك فإن $f(x, y) = 0$ غير متناظرة مع المحور y.

وبالمثل فأن:

$$f(-x,-y) = 2(-x)^3 - (-x)(-y) + 3(-x)^2 = -2x^3 - xy + 3x^2$$

وهي ليست المعادلة .... وبذلك فإن $f(x, y) = 0$ ليست متناظرة مع نقطة الأصل. أنظر الشكل رقم (1-4)

والآن نتناول الخاصية الثالثة وهي:

ج- امتداد المنحنى **Extent**

لا تؤخذ في نظام الإحداثيات المتعامدة آلا النقاط: (x , y) التي أبعاد إحداثياتها أعداداً حقيقية فقط. كذلك تستبعد قيم x التي تقابلها قيم خيالية لـ y وكذلك قيم y التي تقابلها قيم خيالية لـ x. فعندما تظهر قوى أسية زوجية لمتغير في أية معادلة فإن حل المعادلة للوصول إلى قيمة ذلك المتغير يتطلب إيجاد جذور تربيعية أو جذور زوجية أخرى وحيث أن الأعداد السالبة ليست لها جذور تربيعية حقيقية ، ففي حالات من هذا النوع يصبح امتداد المنحنى محدداً كذلك الحال بالنسبة للجذور الزوجية الأخرى للأعداد السالبة.

إن أية محدودية على امتداد أي متغير تؤدي إلى محدودية امتداد المنحنى الذي تمثله المعادلة كما أن محدودية أي متغير ربما يؤدي إلى محدودية امتداد المتغير الأخر في المعادلة ذاتها.

<u>مثال</u>

بين فيما إذا كانت هناك محدودية على امتداد المنحنى الممثل بالمعادلة الآتية:

$$x^2 + y^2 = 16$$

إذا حُلَّت المعادلة بحثا عن قيمة x نحصل على:

$$x = \pm\sqrt{16 - y^2}$$

ويلاحظ أن الكمية $(16 - y^2)$ تحت الجذر تبقى موجبة إذا كانت:

$$-4 \le y \le 4$$

ولهذا فإن اتجاه y يكون محددا في فاصلة المسافة:

$$-4 \le y \le 4$$

أما إذا حُلَّت المعادلة لإيجاد قيمة y فأن:

$$y = \pm\sqrt{16 - x^2}$$

وبنفس الطريقة يلاحظ أن امتداد المنحنى في الاتجاه x يبقى محدوداً بفاصلة المسافة $-4 \le y \le 4$.

أما الخاصية الرابعة للمنحنيات فهي:

د- الخط المحاذي Asymptotes

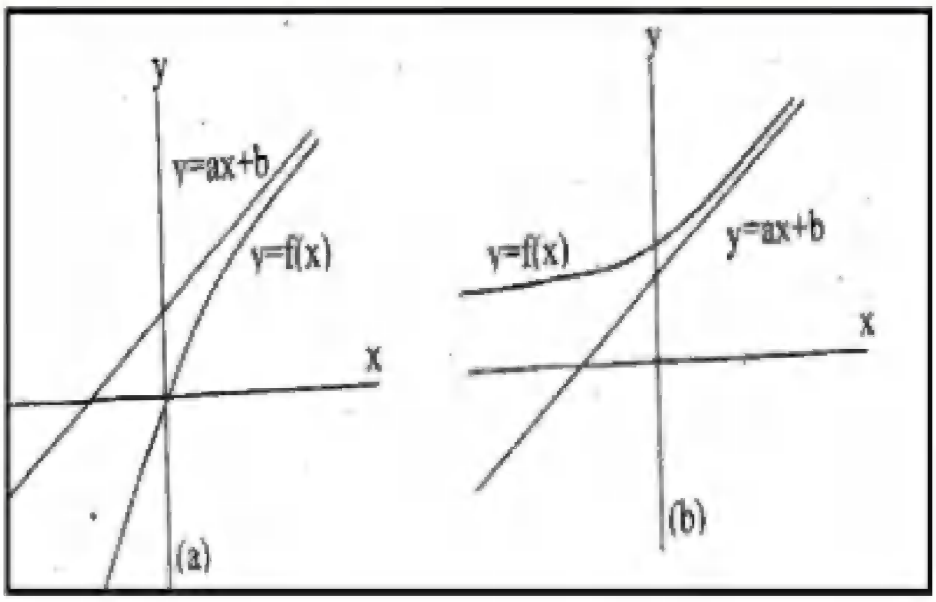
ويقصد بالخط المحاذي: الخط المستقيم الذي يقترب من المنحنى تقارباً مستمراً دون أن يلامسه إلا على بعد ما لا نهاية له ويدعى هذا الخط خطا محاذيا لهذا المنحنى.

ولابد من الإشارة إلى أن خاصية تقارب خط مستقيم من منحنى معين تعني دنو المنحنى من الخط اعتباطيا كلما ابتعدت المسافة عن نقطة البداية دون أي قيد.

وبشكل عام يكون الخط المستقيم مثل $y = ax + b$ خطاً محاذياً للمنحنى $y = f(x)$ إذا اقترب المنحنى f(x) من الخط $ax + b$ اعتباطياً كلما زِيدت قيمة x,y دون أي قيد. وهذا ما يمكن كتابته بالصيغة التالية:

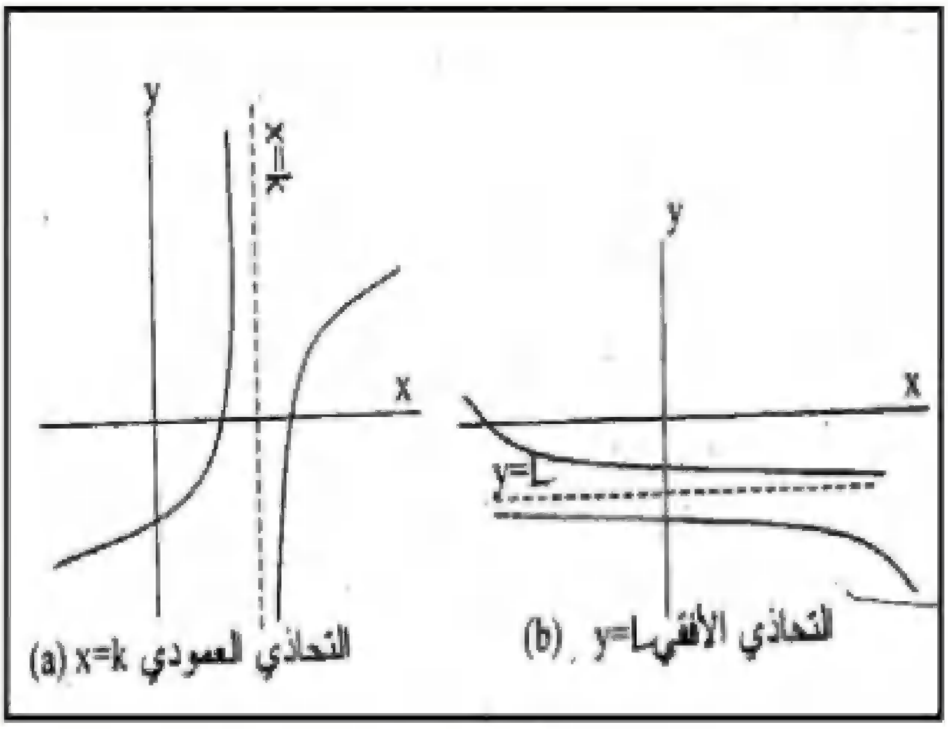
$f(x) \to ax + b$ كلما $y, x \to \infty$ ...(1-2)

كما موضح في الشكل رقم (1-5) أدناه:



شكل رقم (٥-١)

وعادة ما تعطى أهمية في الحياة العملية للخطوط المحاذية التي تتوازى أو تتطابق مع إحدى الإحداثيات ويوضح الشكل رقم (1-6) الخطوط المحاذية العمودية والأفقية:



شكل رقم (٦-١)

حيث يمثل الخط x = k التحاذي العمودي مع المنحنى y = f(x) عندما $x \to k$ و $y \to \infty$.

كما أن الخط $y = l$ يمثل الخط المحاذي الأفقي مع المنحنى y = f(x) عندما $y \to l$ و $x \to \infty$

ولهذا فإن x = 4 هو المحاذي للمنحنى.والآن نحل المعادلة لإيجاد قيمة y:

$$y(x-4) = 3 - x$$

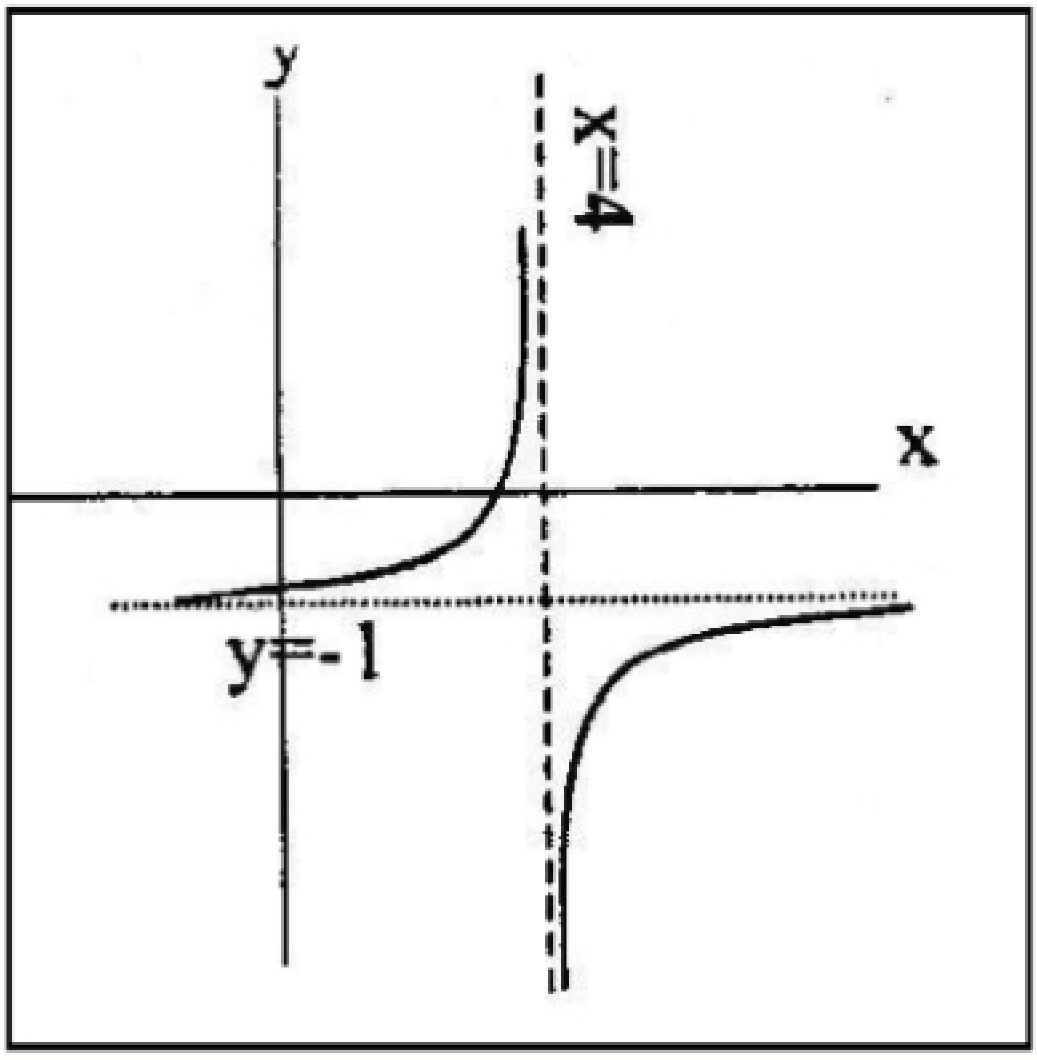
$$y = \frac{3-x}{x-4} = \frac{x-3}{4-x}$$

ومن النتيجة يمكن ملاحظة ما يأتي:

عندما $x \to +\infty$ فإن: $y \to -1$ و $y < -1$

وعندما $x \to -\infty$ فإن: $y \to -1$ و $y > -1$

ولهذا فأن: $y = -1$ هو المحاذي للمنحنى كما مبين في الشكل رقم (1-7)



شكل رقم (٧-١)

هـ- التحليل إلى العوامل Factorization

يقصد بالتحليل إلى العوامل إمكانية كتابة المعادلة $f(x,y) = 0$ كحاصل ضرب عاملين أو أكثر كما يأتي:

$$f(x,y) = g(x,y).h(x,y) = 0 \quad \text{....(1-3)}$$

وحينئذ فإن النقاط (x , y) التي تفي إحداثياتها بمتطلبات $g(x,y)=0$ أو $h(x,y)=0$ تقع على المنحنى $f(x,y)=0$ لهذا فإن رسم $f(x,y)=0$ يتضمن رسم $g(x,y)$ أو $h(x,y)$.

إن التحليل إلى العوامل يساعدنا في رسم المعادلة بيانيا عندما يصعب رسمها.

<u>مثال</u>

ارسم المعادلة الآتية:

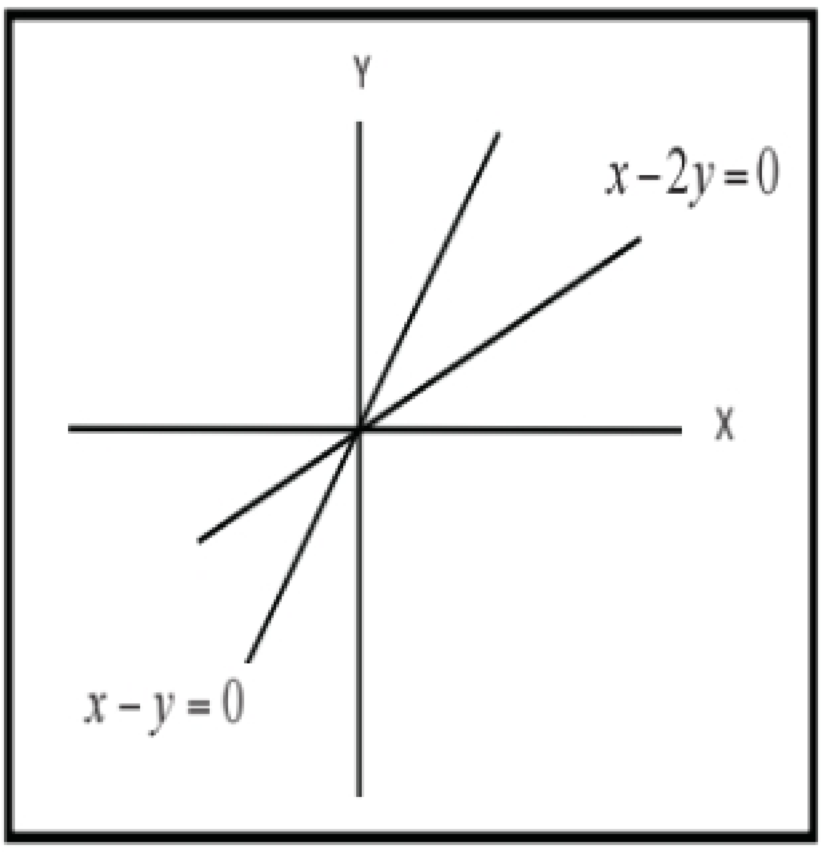
$$x^2-3xy+2y^2=0$$

إن المعادلة أعلاه يمكن تحليلها كما يأتي:

$$(x-y)(x-2y)=0$$

ولهذا فإن الرسم البياني (1-8) يتضمن رسم الخطين:

$x-y=0$ و $x-2y=0$ وكما يأتي:



شكل رقم (٨-١)

و – المحل الهندسي النقطة والمحل الهندسي التخيلي

تستوفي بعض المعادلات شروطها بإحداثيات ذات نقطة أو عدد من النقاط المحددة، ويدعى الرسم البياني لمثل هذه المعادلات بالمحل الهندسي ذي النقطة، إما البعض الأخر

من المعادلات فتستوفي شروطها بإحداثيات ذات نقاط غير حقيقية. إن مثل هـذه المعـادلات لا رسـم بيـاني لها وتمثل محلاً هندسياً تخيلياً.

أمثلة

المعادلة $(x-2)^2+(y-2)^2=0$ لا تستوفي حلها إلا بالنقطة (2 , 2) ولهذا فإن رسمها البياني هو نقطة محل هندسي.

أما المعادلة $(x-9)+(y-9)=0$ فتستوفي حلها بالنقاط (3,3), (3,-3), (-3,3), (-3,-3) ولهذا فإن رسمها البياني هو نقطة محل هندسي.

في حين المعادلة $x^2+y^2=0$ لا تستوفي حلها بأي زوج من قيم x , y الحقيقية ولهذا فإن محلها الهندسي هو تخيلي لأن $y=\sqrt{-x^2}$ أو $x=\sqrt{-y^2}$ والآن لنتناول بعض الأمثلة التي توضح خصائص المعادلات ذات الدرجة الثانية الأنفة الذكر.

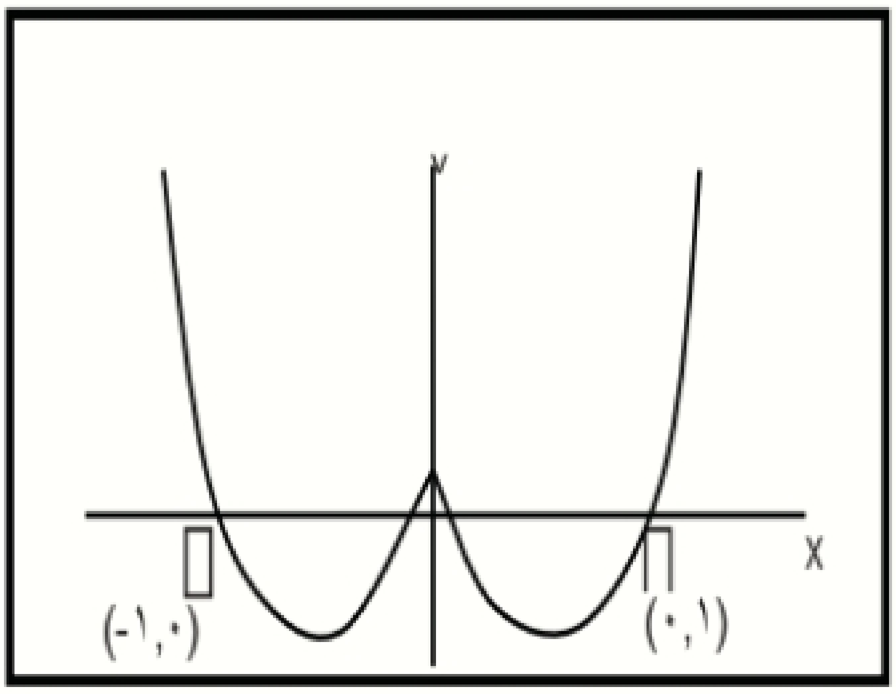
مثال

ارسم المعادلة التالية وبين الخصائص المستخلصة من الحل.

$$y=x^4-x^2$$

الجواب:

عند رسم المعادلة نحصل على الشكل الآتي رقم (9-1)



شكل رقم (٩-١)

ومن الشكل (1-9) تظهر خصائص المنحنى هي:

الجزء المحصور: (0,0),(1,0),(-1,0)

الامتداد: لا حدود له

التناظر: حول المحور -y

التحاذي: لا يوجد

مثال

ارسم المعادلة الآتية $y - 2x^2 = 0$ وبين خصائص المنحنى:

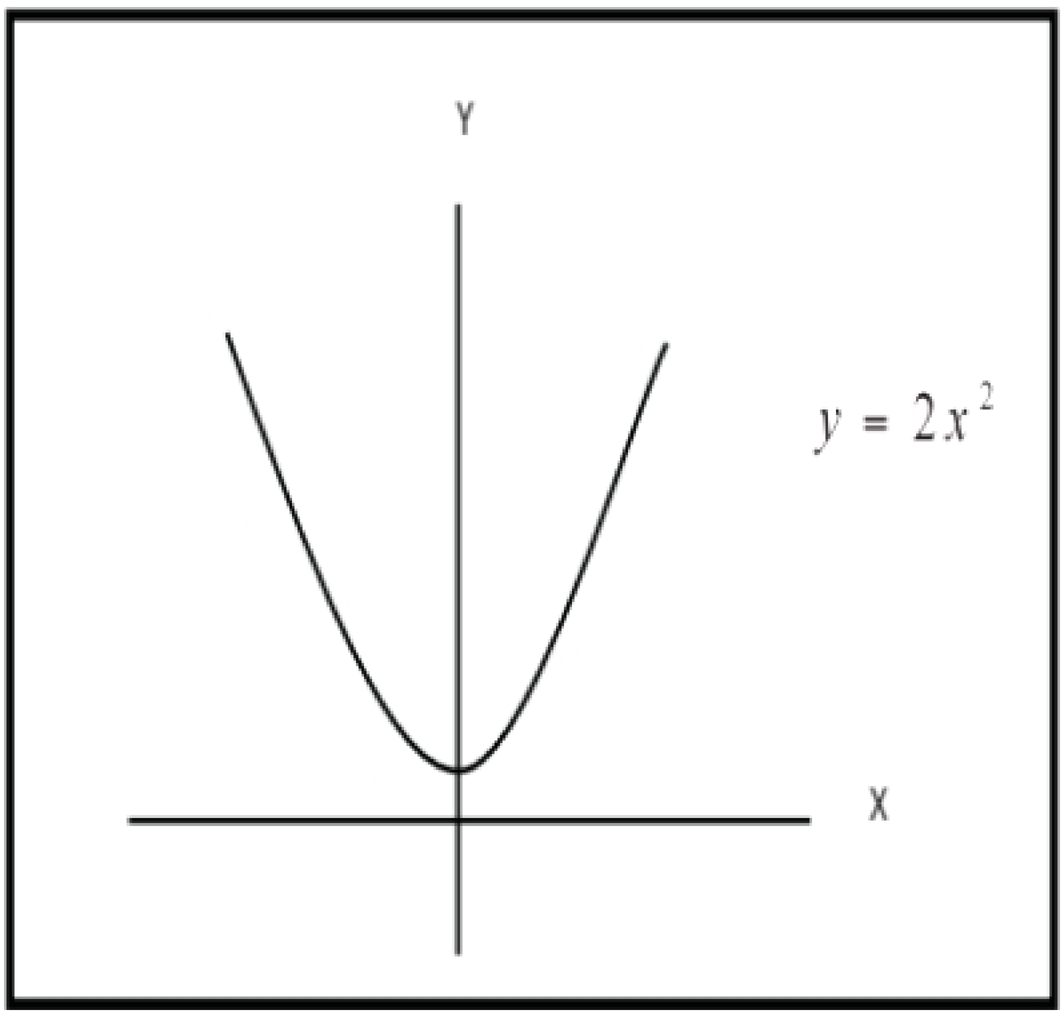
الجواب:

$$y - 2x^2 = 0$$

بإعادة الترتيب نحصل على:

$$y = 2x^2$$

والآن نرسم المعادلة كما في الشكل (1-10):



شكل رقم (١٠-١)

ومن الرسم نستنتج أن خصائص المنحنى هي:

الجزء المحصور: (0,0)

الامتداد: لا حدود له

التناظر: حول المحور -y

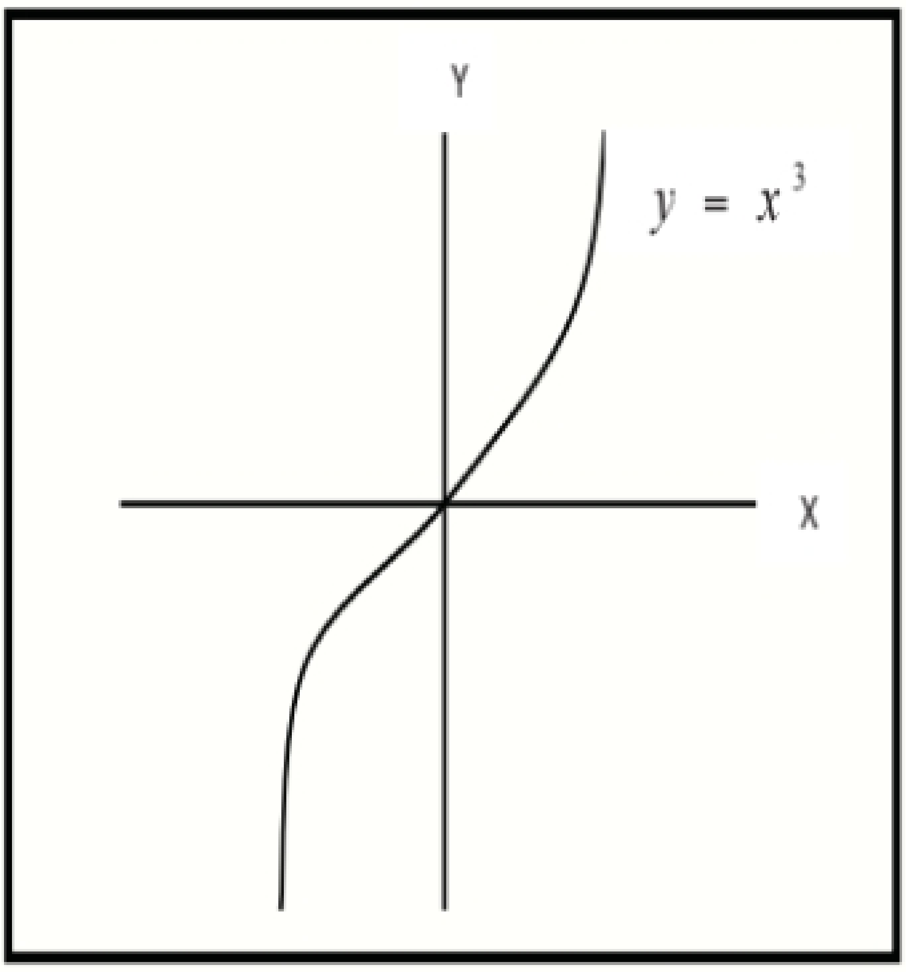
التحاذي: لا يوجد

<u>مثال:</u>

ارسم المعادلة الآتية $y = x^3$ وبين خصائص المنحنى:

<u>الجواب:</u>

نرسم المعادلة: $y = x^3$ كما في الشكل (1-11)



شكل رقم (١١-١)

من الشكل أعلاه نستنتج خصائص المنحنى هي:

الجزء المحصور: (0,0)

الامتداد: لا حدود له.

التناظر: حول نقطة الأصل.

التحاذي: لا يوجد.

تمارين (١-١)

ارسم المنحنيات التي تمثل المعادلات الآتية وبين الجزء المحصور والامتداد والتناظر والتحاذي لكل منها.

$$2y - x^3 = 0$$

$$3xy^2 + 15 = 0$$

$$x^3 - 4x = y$$

$$y^2 - 2x^2 y + x^2 = 0$$

$$x^2 y + y^2 = 5$$

$$x + x^2 - 4 + y = 0$$

$$y - x + x^2 = 0$$

$$2y + 4xy = 0$$

$$y^4 - x^4 - 9 = 0$$

$$y^2 + x^4 - 1 = 0$$

١-٣ معادلات الدرجة الثانية Quadratic Equations

١-٣-١ تعريف

تعرف معادلة الدرجة الثانية (أو المعادلة الثنائية) بأنها المعادلة التي تأخذ الصيغة الآتية:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1\text{-}4)$$

حيث أن كل من a,b,c ثوابت (سالبة أو موجبة) وb,c ربما تكون موجبة أو سالبة أو صفر. على سبيل المثال:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$4x^2 - 5x = 0$$

$$-2x^2 + 4 = 0$$

هي معادلات من الدرجة الثانية. وسميت بالدرجة الثانية لان أعلى درجة (قوة) رفع إليها المتغير x هو الدرجة (2). هذا من الناحية الشكلية ولكن من الناحية الرياضية فإن سبب التسمية يعود إلى وجود قيمتين وفقط قيمتين للمتغير x تفي بمتطلبات هذا النوع من المعادلات ولهذا تسمى المعادلة المذكورة بالمعادلة من الدرجة الثانية في x على افتراض أن x هو المتغير المعني فيها. وتسمى قيمتا x اللتان تفيان بمتطلبات المعادلة بحل هذه المعادلة ومن ذلك نستنتج إن لمعادلة الدرجة الثانية حلين و لنأخذ المثال التالي:

مثال:

خذ المعادلة الآتية:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

بحل هذه المعادلة نحصل على:

$$(x-3)(x-2) = 0$$

وهذا يعني بان هناك حلان للمعادلة هما: أما $x = 2$ أو $x = 3$

٢-٣-١- حل المعادلة من الدرجة الثانية

تحل المعادلة من الدرجة الثانية بثلاثة طرق هي:

أ- طريقة التحليل إلى العوامل

وذلك بتحليل المعادلة إلى عواملها وهي طريقة أساسية كثيرة الاستعمال والمثال آلاتي يوضح آلية هذه الطريقة والتي استخدمت في المثال أعلاه:

<u>مثال:</u>

حل المعادلة آلاتية: $3x^2 - 8x + 4 = 0$

<u>الجواب:</u>

نحلل إلى العوامل:

(3x-2)(x-2)

وهذا يعني y إما $3x - 2 = 0$ أو $x - 2 = 0$

$x = 2 \quad x = \frac{2}{3}$

إذن هناك حلان للمعادلة هما $(2, \frac{2}{3})$

ب- طريقة الدستور

وذلك باستخدام صيغة ما يسمى بالدستور وهي صيغة نأخذها جاهزة ويمكن الرجوع إلى طريقة اشتقاقها في الكتب الرياضية الأولية وتستعمل عندما يتعذر تحليل المعادلة إلى العوامل الأولية أو إذا كان يعتقد أنها الأنسب في إيجاد الحل وهي كما يأتي:

إذا كانت الصيغة العامة لمعادلة الدرجة الثانية

$$ax^2 + bx + c = 0$$

فإن صيغة الدستور هي:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (1\text{-}5)$$

<u>مثال:</u>

حل المعادلة الآتية:

$$2x^2 - 7x + 5 = 0$$

نستخدم صيغة الدستور ولدينا: a=2 , b=-7 , c=5

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(2)(5)}}{2(2)}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{4}$$

$$= \frac{7 \pm 3}{4}$$

إما $x = \frac{7+3}{4}$ أو $x = \frac{7-3}{4}$

$= \frac{5}{2}$ $\qquad$ $= 1$

ج- طريقة إكمال المربع

في بعض الأحيان لا يقبل الطرف الأيمن من المعادلة التحليل إلى العوامل بعد إعادة صياغتها بحيث يكون الطرف الأيمن صفراً ولأجل تكييف المعادلة كي تصبح قابلة للتحليل إلى العوامل كمربع كامل، نضيف إلى أو نطرح من طرفيها أو نضربهما أو نقسمهما على قيمة معينة وكما موضح في المثال الآتي:

<u>مثال</u>

حل المعادلة الآتية: $4x^2 - 8x + 3 = 0$

كما يتبين من المعادلة أنها غير قابلة للتحليل إلى العوامل لذلك تقسم المعادلة على معامل (x^2) فنحصل على:

$$x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$$

ننقل المقدار الثابت إلى الطرف الأيسر:

$$x^2 - 2x = -\frac{3}{4}$$

الجزء الثاني

نضيف إلى طرفي المعادلة ما يجعل الطرف الأيمن مربعا كاملا ويظهر أن العدد (1) هو الذي يفي بالغرض:

$$x^2 - 2x + 1 = -\frac{3}{4} + 1$$

$$(x-1)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x - 1 = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$x - 1 = \pm\frac{1}{2}$$

وهذا يعني أما $x-1=\frac{1}{2}$ أو $x-1=-\frac{1}{2}$

$$x = \frac{3}{2} \qquad x = \frac{1}{2}$$

لقد كانت الصيغة (1-4) هي الصيغة المبسطة للمعادلة من الدرجة الثانية أما الصيغة العامة لها فهي:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + hx + gy + m = 0 \qquad (1\text{-}6)$$

حيث أن a,b,c,h,g,m ثوابت وعلى الأقل واحد من (a,b,c,h) ليس صفراً ويأخذ منحنى المعادلة حالات عديدة نتناول البعض منها في الفقرة الآتية:

تمارين (٢-١)

حل المعادلات الآتية بإحدى الطرق الآتية:

أ- التحليل إلى العوامل.

ب- بطريقة الدستور.

جـ- بطريقة أكمال المربع.

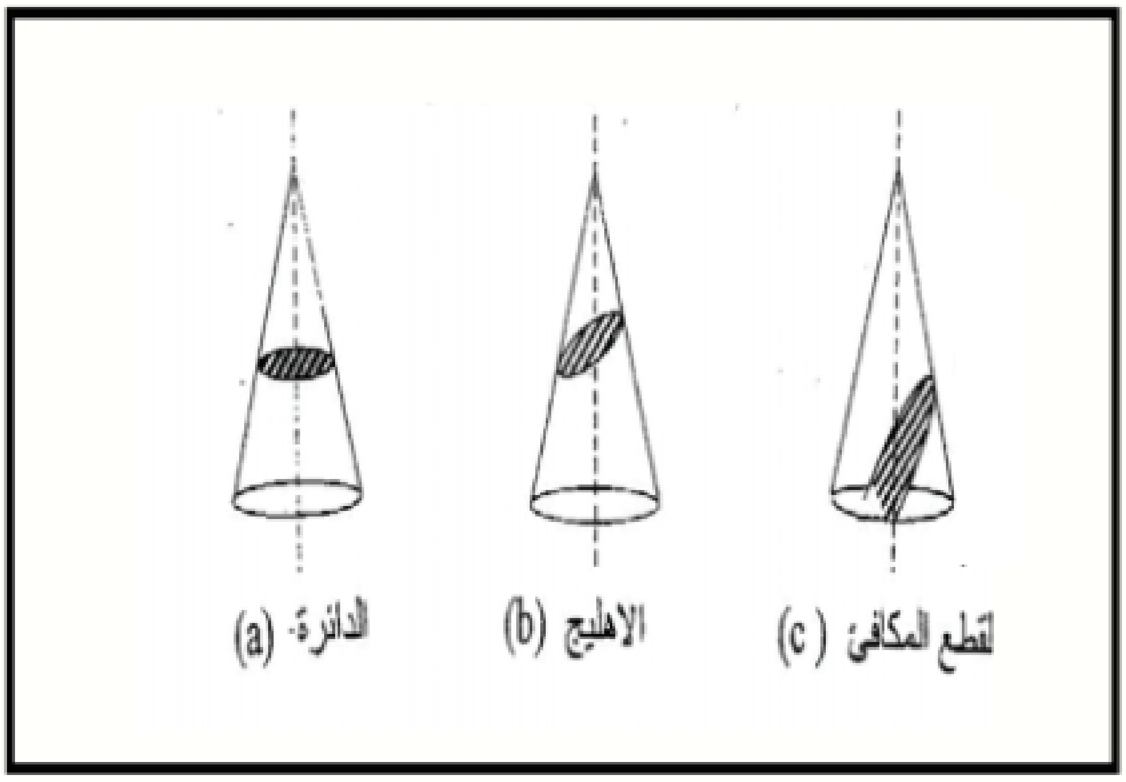
١- $x^2 + 4x + 12 = 0$ ٢- $2x^2 - x - 15 = 0$

$y^2 - 6y + 5 = 0$ -٤ $3x^2 - 13x - 10 = 0$ -٣

$x^2 + 12 = 3x$ -٥

٣-٣-١- القطوع المخروطية

هناك بعض معادلات الدرجة الثانية بمتغيرين تظهر منحنياتها بشكل قطوع مخروطية. ويقصد بالقطوع المخروطية الأشكال التي تظهر عند قطع المخروط القائم بمستوي ذي حالات مختلفة فلو تمثلنا مخروط من هذا النوع فإن القطع التي تعنينا والتي تظهر على المخروط هي: الدائرة والاهليج والقطع المكافئ والقطع الزائد وكما يظهر في الشكل رقم (1-12):



الشكل رقم (١٢-١)

والآن نتناول كل حالة من هذه الحالات على انفراد:

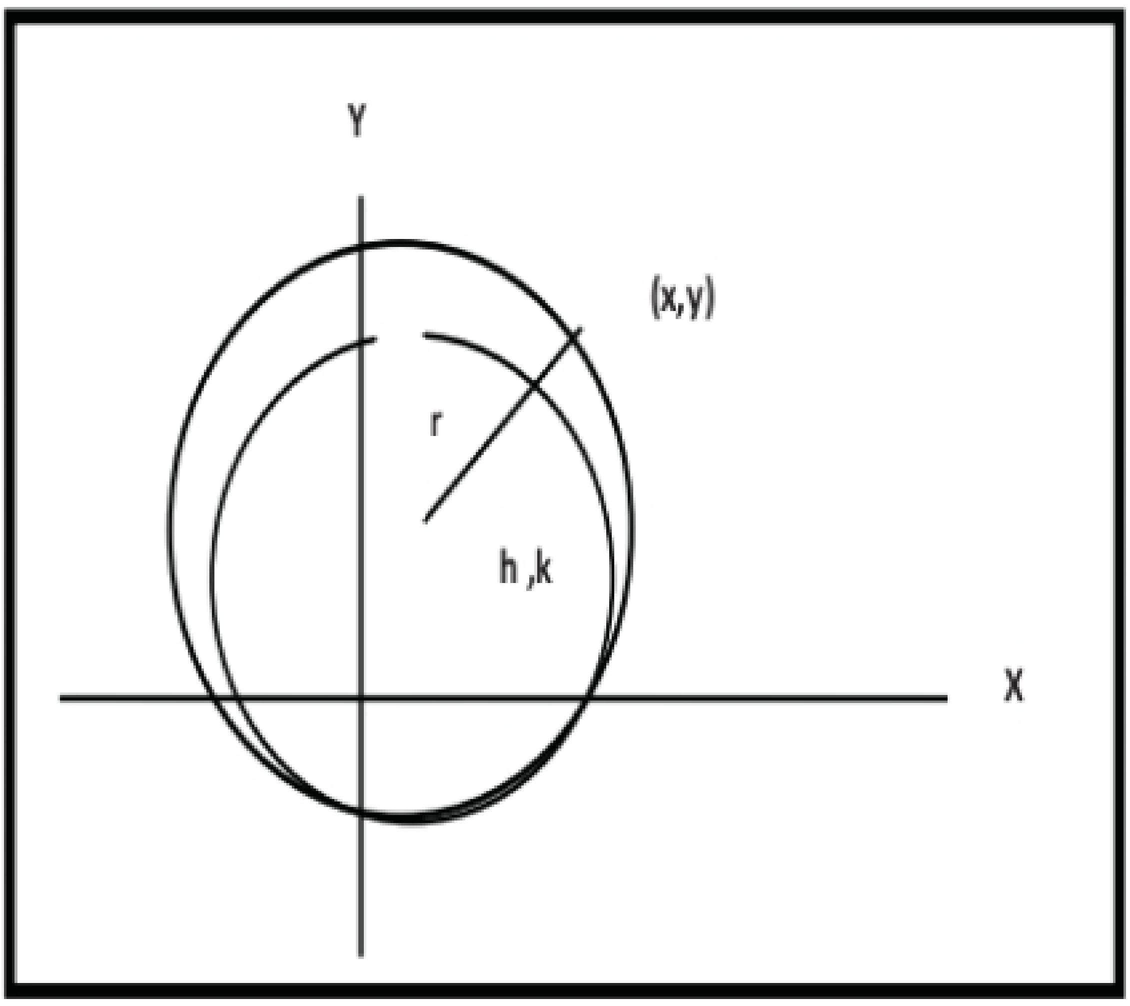
أ-الدائرة Circle

تعرف الدائرة على كونها مجموعة من نقاط المستوي تقع كل منها على بعد ثابت (نصف القطر) من نقطة معلومة في المستوي نفسه.

فإذا كانت m نقطة معلومة في المستوي وإن احداثييها (h , k) وكان نصف القطر (r) عدد حقيقي موجب وكانت (x , y) أية نقطة في المستوي بحيث أن بعدها (h , k)

يساوي (r) فإن مجموعة كل النقط (x , y) تمثل الدائرة. لنأخذ الشكل رقم (1-12) وعندما يمثل البعد بين النقطتين (h , k)، (x , y) بصيغة الإحداثيات نحصل على المعادلة (7 - 1) الآتية:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \quad \text{... (1-7)}$$



الشكل رقم (١٣-١)

والصيغة (7 - 1) هي الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة ويلاحظ ما يلي:

إذا كانت 0 > r2 يكون المحل الهندسي محلاً تخيلياً (غير حقيقي).

إذا كانت 0 = r2 يكون المحل الهندسي نقطة.

إذا كانت 0 < r2 يكون المحل الهندسي دائرة.

لنأخذ الأمثلة الآتية:

<u>مثال (١):</u>

جد معادلة الدائرة التي نصف قطرها يساوي (5) ومركزها (4، 3).

الجواب:

حيث أن k = 4 h = 3 , , r = 5 فإن معادلة الدائرة هي:

$(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$ ... (انتهى الحل)

ولما كان بالإمكان وضع المعادلة (1-17) بصيغتها العامة كما يأتي:

فإن: $x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2$

وبإعادة الترتيب ينتج:

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

وبافتراض أن: c = h2 + k2 - r2 , b = -2k , a = -2h

فإن المعادلة تؤول إلى:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \quad \text{... (1 - 8)}$$

حيث أن: $h=-\frac{a}{2}$, $k=-\frac{b}{2}$, $r=\sqrt{h^2+k^2-c}$

والمعادلة (8 - 1) هي الصيغة العامة لمعادلة الدائرة.

مثال (٢):

ضع المعادلة الآتية في الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة وجد مركز ونصف قطر الدائرة:

$$x^2-y^2-6x+4y+9=0$$

الجواب:

نعيد صياغة المعادلة وإضافة العدد (٤) إلى طرفيها فينتج:

$$(x^2-6x+9)+(y^2+4y+4)=4$$

$$(x-3)^2+(y+2)^2=4$$

ومن ذلك نستنتج أن:

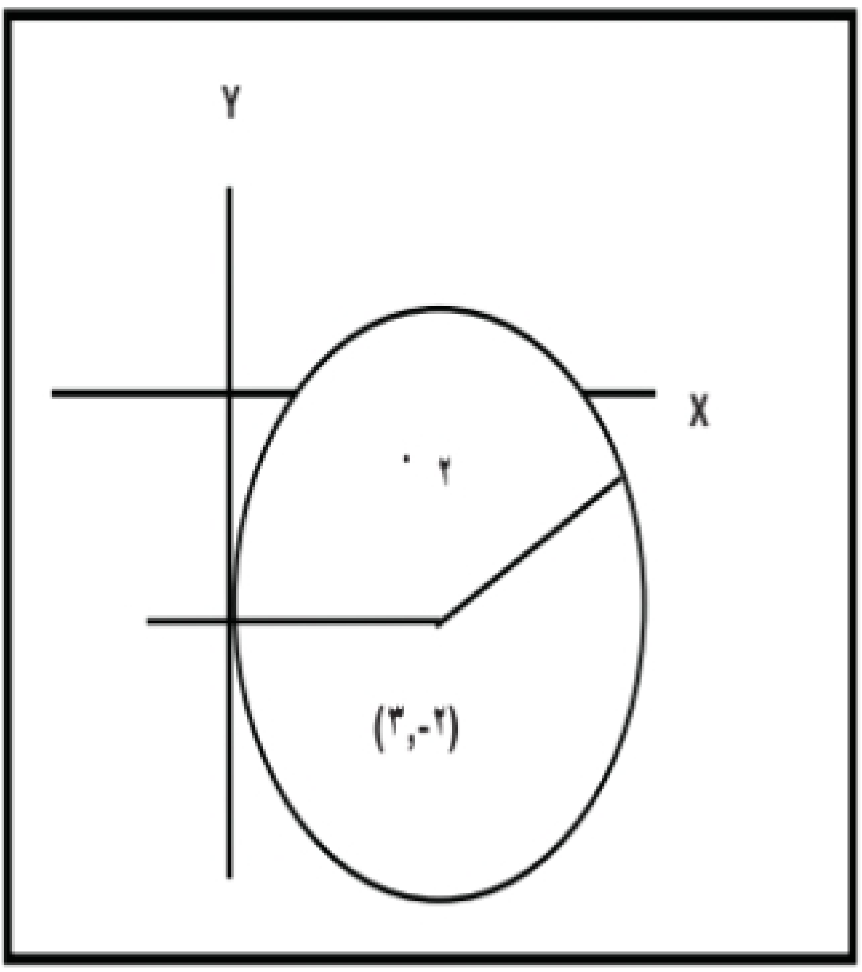
$$r = \sqrt{4} = 2 \quad , \quad k = -2 \quad , \quad h = 3$$

إذن مركز الدائرة هو (3 , -2) وان $r \geq 0$ وهذا يبين بان المحل الهندسي للمعادلة هو دائرة.

وبطريقة أخرى: $h = -\frac{a}{2} = -\frac{-6}{2} = 3 \quad , \quad k = -\frac{b}{2} = -\frac{4}{2} = -2$

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 - 9} = \sqrt{4} = 2$$

كما مبين في الشكل رقم (1-14)



شكل رقم (١٤-١)

مثال (٣):

جد مركز ونصف قطر الدائرة الآتية:

$$x^2 + 8x + y^2 - 14y + 65 = 0$$

الجواب:

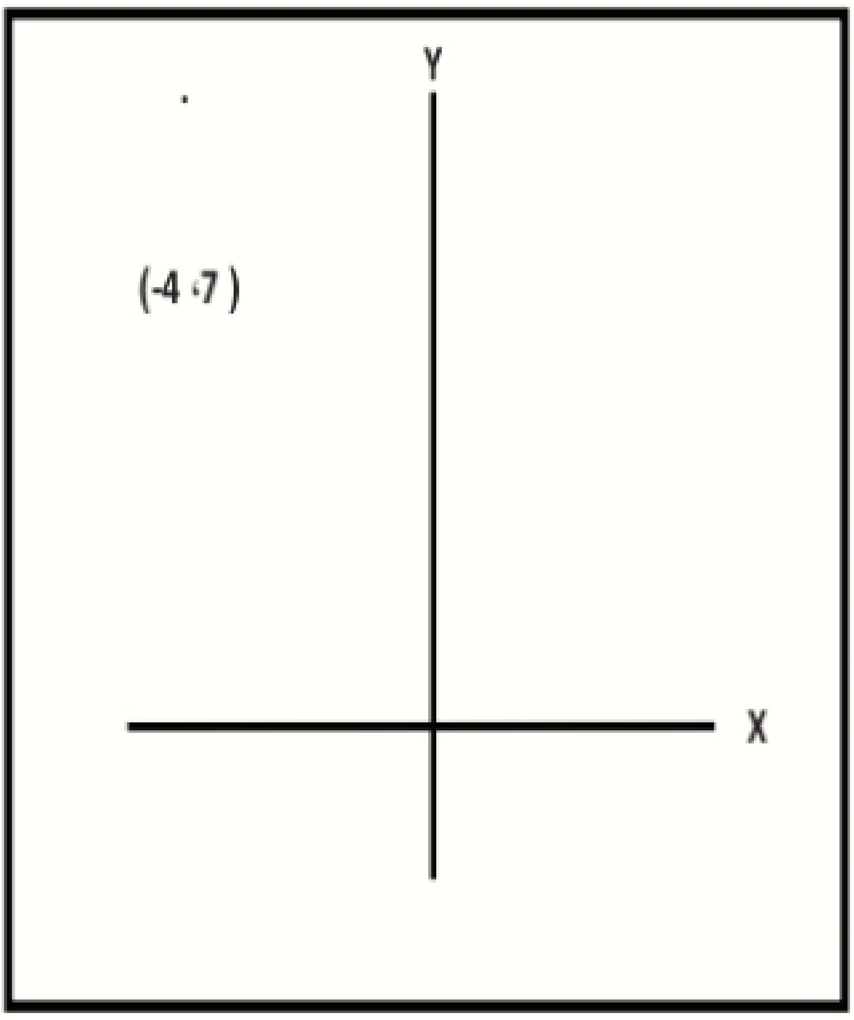
نعيد صياغة المعادلة:

$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 14y + 49) = -65 + 16 + 49$$

$$(x+4)^2 + (y-7)^2 = 0$$

وحيث أن $r = 0$ إذن المحل الهندسي هو نقطة وهي: (4- ,7)

كما مبين في الشكل رقم (١٥-١)



الشكل رقم (١٥-١)

ب- **القطع الاهليجي (القطع الناقص)** Ellipse

وهو مجموعة النقاط على مستوي معين التي مجموع بعدي كل منها عن نقطتين معلومتين ثابت. وتسمى النقطتان المعلومتان بالبؤرة بينما تسمى النقطة المنصفة لقطعة المستقيم التي تصل البؤرتين بمركز الاهليج وكما موضح في الشكل (1-12b). إن الاهليج ينتج عندما يتم قطع المخروط الدائري القائم بمستوي غير مواز وغير قاطع لقاعدته.

وتكتب المعادلة العامة للاهليج كالآتي:

$$ax^2 + cy + dx + ey^2 + f = 0 \quad \text{... (1-9)}$$

حيث أن $a \neq c$ وان إشارتي a , c متشابهة.

ويمكن كتابة المعادلة بصيغتها القياسية مستندين على الصيغة العامة لإكمال المربع:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \dots (1\text{-}10)$$

حيث أن (h , k) مركز الاهليج.

ويتوازى الإحداثي الأكبر للاهليج مع الإحداثي - x إذا كانت a > b أما إذا كانت a < b فيتوازى مع الإحداثي - y حيث أن a , b هما نصف إحداثي الاهليج الموازيين للإحداثيين x , y واللذان يمتدان من مركز الاهليج إلى ابعد أو اقرب نقطة على المحيط ، لذلك فإن إحداثي الاهليج الموازي للإحداثيx تساوي (2a) وإحداثي الاهليج الموازي للإحداثيy تساوي (2b) وعندما a = b يصبح الاهليج دائرة نصف قطرها a = b.

وعندما يكون $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = c$ و كانت:

$$\left.\begin{array}{l} c = 1 \text{ يكون المحل الهندسي اهليجي} \\ c = 0 \text{ يكون المحل الهندسي نقطة هي } (h, k) \\ c < 0 \text{ يكون المحل الهندسي غير حقيقي (تخيلي)} \end{array}\right\} \dots (1\text{-}11)$$

مثال (١):

ضع المعادلة بالصيغة القياسية للاهليج ثم جد مركزه وإحداثييه الأصغر والأكبر:

$$4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y + 133 = 0$$

الجواب:

نعيد صياغة المعادلة كالآتي:

$$4(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 2y + 1) = -133 + 16 + 9$$

$$4(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = -108$$

وبالقسمة على (36) ينتج:

$$\frac{(x-4)^2}{3^2}+\frac{(y-1)^2}{2^2}=-3$$

ومن ذلك نستنتج أن المحل الهندسي غير حقيقي لأن $c<0$.

<u>مثال (٢):</u>

ضع المعادلة الآتية بالصيغة القياسية وجد مركز الاهليج وإحداثييه الأصغر والأكبر.

$$x^2+9y^2-8x+7=0$$

<u>الجواب:</u>

نعيد صياغة المعادلة كالآتي:

$$(x^2-8x+16)+9(y)^2=-7+16$$

$$(x-4)^2+9(y-0)^2=9$$

والآن نقسم على: $a^2b^2=1\times 9=9$ وينتج:

$$\frac{(x-4)^2}{3^2}+\frac{(y-0)^2}{1^2}=1$$

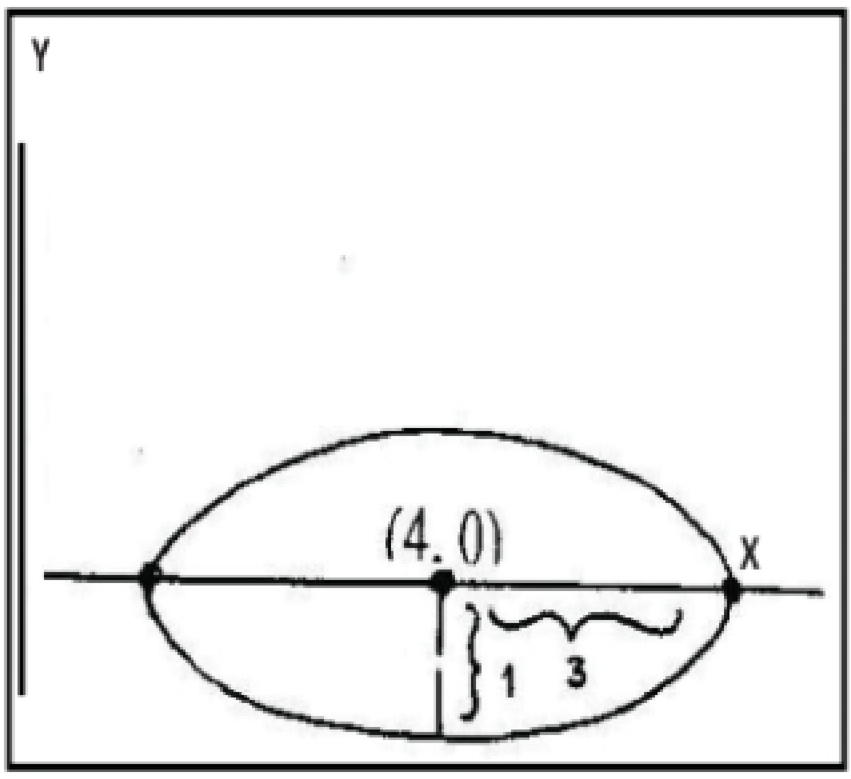
ومن ذلك نستنتج أن:

$c=1$ أذن المحل الهندسي أهليجي.

مركز الاهليج = $(h,k)=(4,0)$ ج- إحداثيي الاهليج: الأصغر=2(1) =2 وهو الموازي للإحداثي y

الأكبر =2(3) =6 وهو الموازي للإحداثي x

الإحداثي الأكبر مواز للإحداثي x (متطابق) لأن $a>b$ كما مبين في الشكل رقم (16-1).



شكل رقم (١٦-١)

ج- القطع المكافئ Parabola

هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط على مستوى ، بعد كل منها عن نقطة معلومة يساوي بعدها عن مستقيم معلوم. وتسمى النقطة المعلومة البؤرة والمستقيم المعلوم الدليل. أما النقطة التي تقع عند منتصف المسافة بين البؤرة والدليل فتسمى رأس القطع المكافئ كما في الشكل (1-12c). وتكتب المعادلة العامة للقطع المكافئ كالآتي:

$$ax^2 + dx + ey + f = 0 \quad (1\text{-}12)$$

إذا كان إحداثي القطع المكافئ مواز للإحداثي y. وتكتب:

$$cy^2 + dx + ey + f = 0 \ldots \quad (1\text{-}13)$$

إذا كان إحداثي القطع المكافئ مواز للإحداثي x.

ويمكن كتابة المعادلتين (1-12) , (1-13) بالصيغة القياسية كالآتي على التوالي:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \ldots \quad (1\text{-}14)$$

حيث أن (h , k) هي قمتا القطع المكافئ ويكون إحداثي القطع موازٍ للإحداثي y.

أو $$(y - k)^2 = 4p(x - h) \ldots \quad (1\text{-}15)$$

حيث أن النقطة (h , k) هي رأس القطع المكافئ وان إحداثي القطع موازي للإحداثي x.

ويتحدد اتجاه وانحناء القطع المكافئ بإشارة ومقدار p كما مبين:

بالنسبة للقطع المكافئ الموازي للإحداثي y: إذا كانت $p < 0$ فإن القطع المكافئ يكون مفتوحاً للأسفل. إذا كانت $p > 0$ فإن القطع المكافئ يكون مفتوحاً للأعلى.

بالنسبة للقطع المكافئ الموازي للإحداثي x: إذا كانت $p < 0$ فإن القطع المكافئ يكون مفتوحاً لليسار. إذا كانت $p > 0$ فإن القطع المكافئ يكون مفتوحاً لليمين.

ويأخذ المحل الهندسي للقطع المكافئ الحالات الثلاثة الآتية: بالنسبة لإحداثي القطع المكافئ الموازي للإحداثي y.

إذا كان $(x-h)^2 < 0$ فلا يوجد محل هندسي حقيقي.

إذا كان $(x-h)^2 = 0$ فإن المحل هندسي يكون خطاً مستقيماً.

إذا كان $(x-h)(x-k) = 0$ فإن المحل هندسي يكون خطين متوازيين.

وكذلك الحال بالنسبة لإحداثي القطع المكافئ الموازي للإحداثي x.

مثال:

ضع المعادلة الآتية بالصيغة القياسية للقطع المكافئ وارسم المعادلة.

$$x^2 - 2x + y - 3 = 0$$

الجواب:

نعيد صياغة المعادلة كالآتي:

$$(x^2 - 2x + 1) = (-y + 3 + 1)$$

$$(x-1)^2 = -1(y-4)$$

ومن ذلك نستنتج أن:

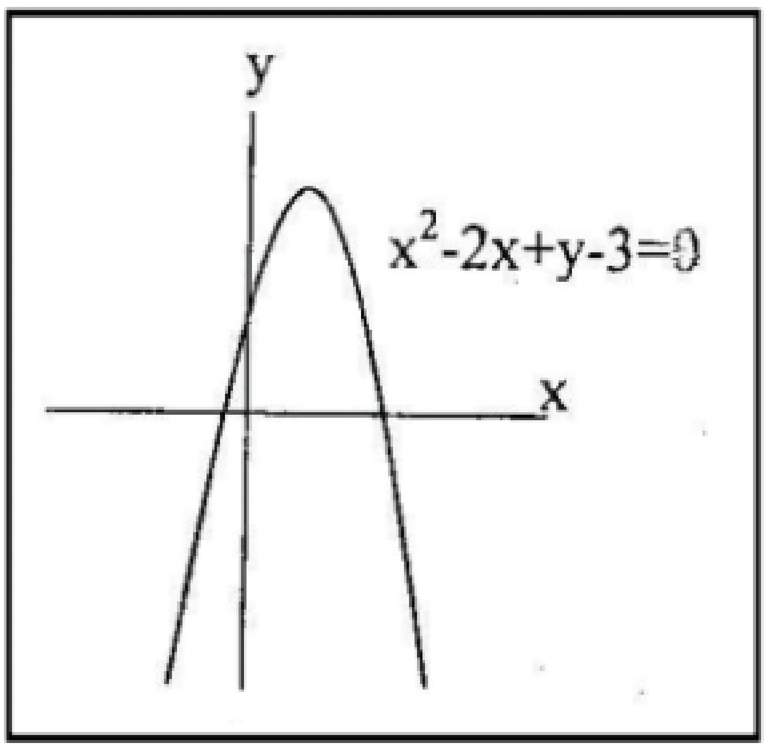
القطع مكافئ

رأس القطع المكافئ هي النقطة (1,4).

إحداثي القطع موازي للإحداثي y.

والقطع المكافئ مفتوحاً للأسفل لأن p < 0.

وكما مبين في الشكل رقم (17-1)



الشكل رقم (١٧-١)

تمارين (٣-١)

حدد أي نوع من المنحنيات تمثل المعادلات الآتية بعد وضع كل منها في صيغته القياسية ثم ارسم المنحني مبيناً خصائصه:

y2 - 8y = 0

y2 - 4y +6 = 0

y - x2 - 2x +3 = 0

9x + 3xy = 0

x2 + y2 - 6x - 3y + 6 = 0

2y2 - 3x = 0

y2 + 2x - 7y = 0

y - 2x2 = 0

x2 - 9y2 +7 - 8x = 0

y2 + x2 +2xy = 0

٤ـ١ المنحنيات الاسية Exponential Curves

تسمى المعادلة أو الدالة التي فيها متغير مرفوع إلى أس ثابت بالدالة ذات القوة مثال ذلك:

(1-16) $y = xa$ ...

حيث أن (x) هو الأساس و(a) هو الأس.

أما الدالة التي فيها الثابت مرفوع إلى متغير أسي فتسمى بالدالة الاسية مثال ذلك:

(1-17) $y = ax$ ...

حيث أن (a) هو الثابت الأساس و (x) هو المتغير الأسي.

وقبل الدخول في المنحنيات الاسية لا بد من التطرق إلى القواعد الرئيسية للأسس والتي تفيد في معالجة الدوال سواء ذات القوة أو الاسية وهي كما يأتي:

ت	القاعــدة	أمثلة
١	$x^m + x^n = x^{m+n}$	$6^3 \times 6^4 = 6^7$
٢	$(x^m)^n = x^{m\times n}$	$(4^2)^5 = 4^{10}$
٣	$(xyq)^m = x^m y^m q^m$	$(3\times 1\times 6)^3 = 3^3 \times 1^3 \times 6^3$
٤	$(\frac{x}{y})^m = \frac{x^m}{y^m}$	$(\frac{5}{7})^4 = \frac{5^4}{7^4}$
٥	$x^{-m} = \frac{1}{x^m}$	$7^{-2} = \frac{1}{7^2}$
٦	$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}}$	$\frac{8^5}{8^7} = 8^{5-7} = \frac{1}{8^2}$
٧	$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ حيث أن n = عدد صحيح موجب وتقرأ النتيجة الأخيرة بالجذر النوني ل (x)	$6^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{6}$

ت	القاعـــدة	أمثلة
٨	$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$ حيث أن كل من m , n عددان صحيحان n > 0 وتقرأ كالآتي: القوة (m) للجذر النوني لـ(x)	$4^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{4^3} = (\sqrt[5]{4})^3$
٩	$x^0 = 1$ بشرط $x \neq 0$	

ومن أكثر الاستعمالات المتداولة للأسس هو استعمالها في الدلالة على الإعداد الكبيرة جداً أو الصغيرة جداً في قيمتها المطلقة وذلك عن طريق وضعها بصيغة عدد ثابت مضروب في (١٠) مرفوع لقوة أسية معينة على سبيل المثال:

$$60000 = 6 \times 10^4$$

$$2500000 = 25 \times 10^5$$

$$2000000000 = 2 \times 10^9$$

وكذلك:

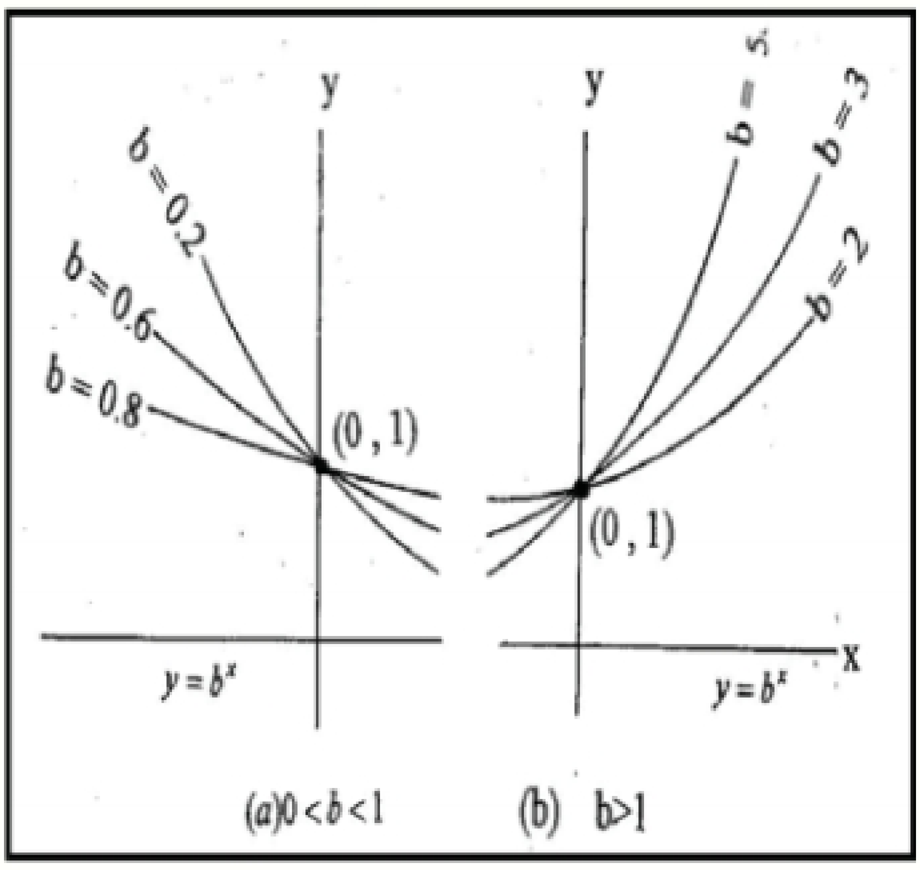
$$0.000007 = 7 \times 10^{-6}$$

$$0.000000000046 = 46 \times 10^{-12}$$
$$= 0.46 \times 10^{-10}$$

ويدعى تمثيل الأعداد بهذه الطريقة بالترميز العلمي **scientific notation**

ومن ابسط أنواع الدوال الأسية الدالة التي تأخذ الصيغة:

$y = b^2$ حيث أن $b > 0$ والمنحنى الذي يمثل هذه الدالة يقع كلية في الربعين الأولين. وهذا المنحنى يتناقص باضطراد عندما $0 < b < 1$ ويتزايد باضطراد عندما $b > 1$ وفي كلا الحالتين فإن المنحنى محاذ للمحور x وجزءه المحصور (0 , 1). وتحدد المعلمة b درجة انحناء الدالة كما في الشكل رقم (1-18) أدناه:



شكل رقم (١٨-١)

إن أكثر الدوال الأسية استعمالاً هي:

$$y = e^x \quad (1\text{-}18)$$

حيث أن e هو اللوغاريتم الطبيعي والذي يساوي تقريباً (2.718). ومعظم الدوال الأسية المستخدمة في التحليلات الاقتصادية هي من نوع الدوال الأسية ذات الأساس e.

والصيغة العامة الأكثر شيوعاً للدالة الأسية هي:

$$(1\text{-}19) \quad y = ae^{kx} + c$$

٥_١ المنحنيات اللوغاريتمية

قبل التطرق إلى هذا النوع من المنحنيات لا بد من تعريف اللوغاريتم:

فلوغاريتم أي عدد موجب مثل (y) لأساس موجب مثل (b) عدا الواحد: هو الأس (x) الذي ترفع به القوة (b) كي نحصل على العدد المذكور. وبهذا يكون لدينا:

$$(1\text{-}20) \ ... \ y = b^x$$

بشرط أن $b \neq 1 , b > 0$

ومن التعريف نستنتج أن:

x هو لوغاريتم y للأساس b

وهذه العلاقة يمكن كتابتها بالمعادلة الآتية:

$$...x = \log_b y \qquad (1\text{-}21)$$

وعادة ما يكون أساس اللوغاريتم أي عدد موجب عدا الواحد، ولكن عملياً غالباً ما يكون الأساس أما العدد (10) كما في اللوغاريتمات الاعتيادية (اللوغاريتمات البركزية) (Logarithms Briggsian) أو العدد ($e = 2.71828$) كما في اللوغاريتمات الطبيعية أي اللوغاريتمات النابيرية: (Naperian Logarithms) وتختصر ب (ln).

وبعرض اللوغاريتم الطبيعي بصيغة النهايات التي سنتناولها في الفصل القادم وكما يأتي:

$$e = \lim_{n \to \infty}(1 + \frac{1}{n})^n$$

ولكن بحدود استعمالات الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس e في الفصل الحالي يلاحظ أن قيمة (e) يمكن أن تقرب لدرجة من الدقة كلما زيدت قيمة (n) في المقدار $(1 + \frac{1}{n})^n$. وتعتبر اللوغاريتمات الاعتيادية أكثر ملائمة في الاستعمالات الحسابية العملية، أما اللوغاريتم الطبيعي فهو الأكثر ملائمة للأعمال النظرية وأصبح تقليداً أن يشار إلى (log x) بأنه اللوغاريتم الاعتيادي ل (x) و(ln x) بأنه اللوغارتيم الطبيعي ل (x) أو لوغاريتم نابير.

أما إذا استعمل أساس آخر فينبغي الإشارة إليه.

Yن استعمالات اللوغاريتم يمكن أن توفر جهداً كبيراً عند معالجة حساب الأعداد الكبيرة جداً أو الأعداد الصغيرة جداً. وقد وضع الرياضيون قواعد لمعالجة العلاقة بين اللوغاريتمات ونذكر منها:

ت	القاعـــدة	أمثلة
-١	$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$	$\log_4 10 = \log_4(5\times2) = \log_4 5 + \log_4 2$
-٢	$\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b x - \log_b y$	$\log_3(\frac{4}{7}) = \log_3 4 - \log_3 7$
-٣	$\log_b x^n = n \log_b x$	$\log_5 8^3 = 3 \log_5 8$
-٤	$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_b x$	$\log_4 \sqrt[9]{7} = \frac{1}{9}\log_4 7$

تمارين (٤-١)

١- أرسم المنحنيات الآتية:

أ- $y = 3^x$ ب- $y = 4^{2/x}$ ج- $y = 2^{x+2}$

٢- أستخرج قيمة ما يأتي:

أ- $32(10)^3$ ب- $56(10)^{-3}$ ج- $\frac{24(10)^{-2}}{12(10)^3}$

٣- ضع بصيغة مبسطة اللوغاريتمات الآتية:

أ- $\log_2\left(\frac{2}{9}\right)$ ب- $\log_5(4\times6)$ ج- $\log_3 \sqrt[4]{12}$

الفصل الثاني

الدوال الاقتصادية غير الخطية

الدوال الاقتصادية غير الخطية

٢_١ مقدمة

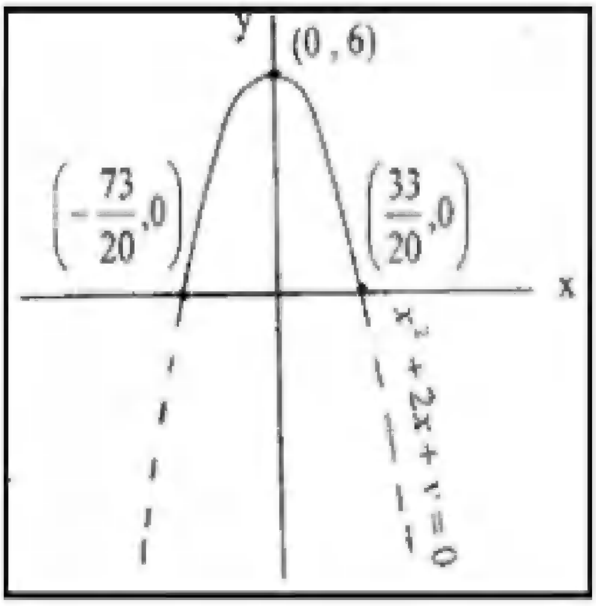
تأخذ كثير من التطبيقات الاقتصادية شكل علاقات غير الخطية كما تأخذ شكلها الخطي الذي تناولناه في الفصل الثاني من الجزء الأول من هذا الكتاب ونستعرض في الفقرات الآتية بعض من التطبيقات غير الخطية الشائعة في علم الاقتصاد.

٢_٢ منحنى الطلب Demand Curve

يمثل منحني الطلب (أو دالة الطلب) العلاقة بين الكميات المطلوبة والعوامل المحددة لها وعلى رأسها سعر السلعة المعينة. فإذا كانت لدينا دالة طلب كما يأتي:

$$x^2 + 2x + y - 6 = 0$$

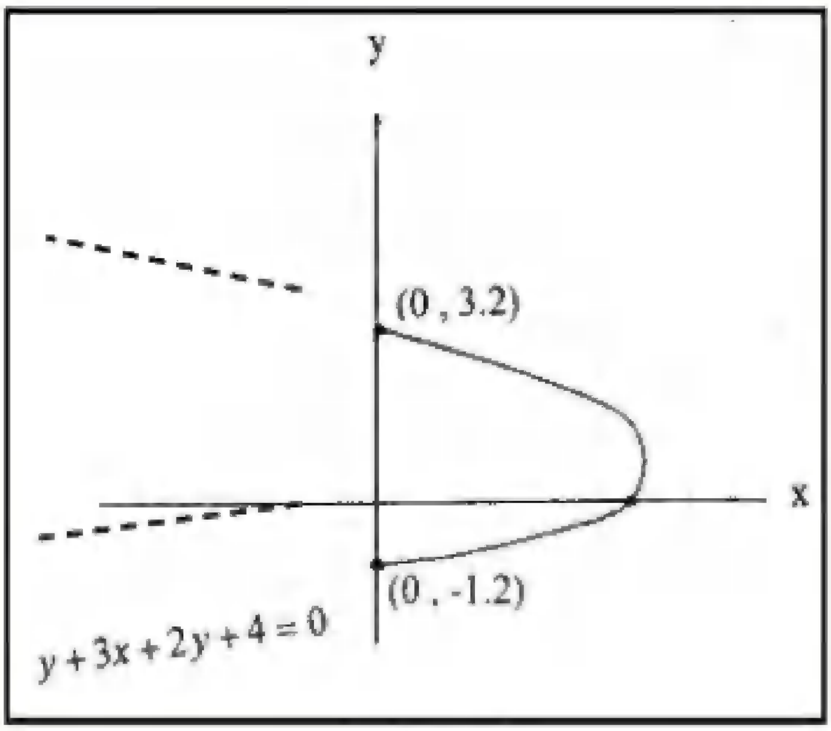
فإنها تحتوي على (y) الذي يمثل الكميات المطلوبة و (x) التي تمثل العوامل المحددة لها كسعر السلعة و أسعار السلع الأخرى، ويمكن إعادة صياغتها لتكتب $y = -x^2 - 2x + 6$ ويظهر واضحاً التناسب العكسي بين السعر والكمية وعند رسم هذه الدالة يتبين أنها من نوع القطع المكافئ المفتوح للأسفل كما في الشكل (2-1).



شكل رقم (١-٢)

أما المعادلة الآتية فهي من النوع المفتوح إلى جهة اليسار شكل (2-2):

$$y^2 + 3x + 2y + 4 = 0$$



شكل رقم (٢-٢)

<u>مثال</u>: كانت دالة الطلب على احد السلع بآلاف الوحدات كالآتي:

$$y = \frac{5}{x^{3/2}}$$

والمطلوب:

أ- حساب الكميات المطلوبة عندما يكون السعر (30).

ب- رسم هذه الدالة.

<u>الجواب:</u>

نعيد صياغة الدالة لتكون:

log y =log 5- 2\3 log x

log y =log 5- 2\3 log (30

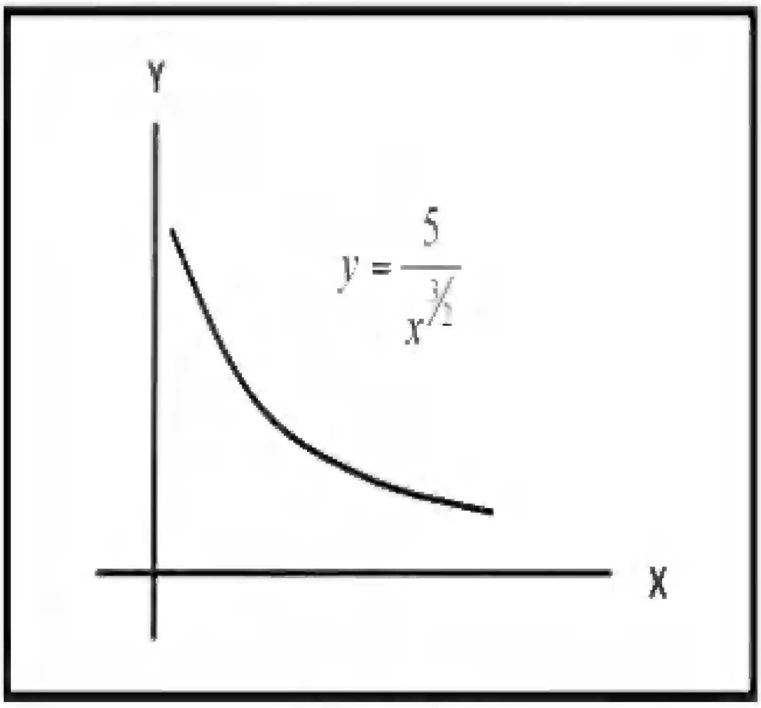
=0.699- 2\3 (1.477)

$\log y = -0.286 \therefore y = 0.52$

أي عندما يكون سعر (30) فان الطلب يكون (0.5) ألف وحدة.

ب- لرسم الدالة نفترض مجموعة من القيم ل(س) أو ل(ص) وننفذ الرسم

البياني بعد ذلك. ولتكن القيم هي 20 , 30 , 40 حيث يظهر الرسم كما في (2-3)

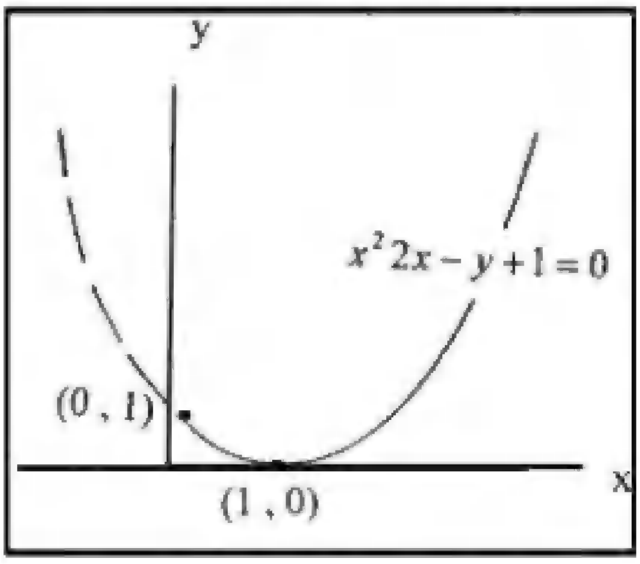


شكل رقم (٣-٢)

٣_٢ منحنى العرض Supply Curve

ويمثل منحني العرض العلاقة بين الكميات المعروضة والعوامل المحددة لها كسعر و أسعار السلع الأخرى وغير ذلك وتأخذ هذه الدالة صيغاً مختلفة وقد تناولنا الصيغة الخطية منها ولكن عندما تكون المعادلة من النوع الآتي ويجري تمثيلها بالمنحني في الشكل رقم (2-4) يتبين أنها معادلة عرض غير خطية من النوع المكافئ المفتوح إلى الأعلى:

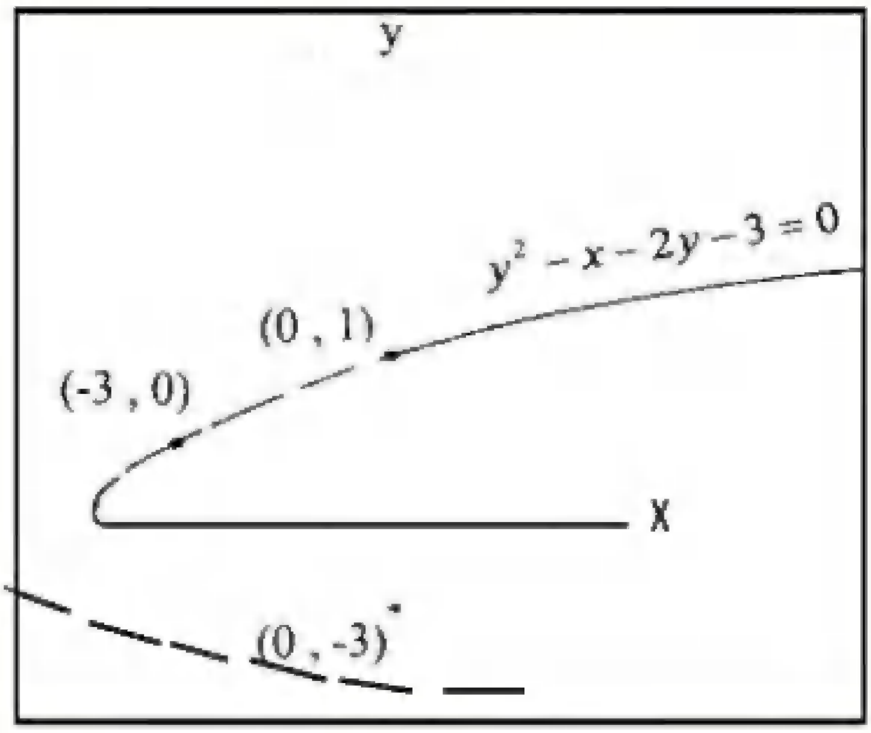
$$x^2 + 2x - y + 1 = 0$$



شكل رقم (٤-٢)

أما المنحنى في الشكل رقم (5-2) فهو أيضا منحني عرض من نوع القطع المتكافئ المفتوح إلى جهة اليمين تمثله المعادلة:

$$y^2 - x + 2y - 3 = 0$$



شكل رقم (٥-٢)

<u>مثال:</u> في دراسة لسوق سلعة معينة وجد إن دالة العرض فيها تأخذ السلوك الآتي:

$$y = 4x^{\frac{3}{5}}$$

والمطلوب:

أ- إيجاد مقدار ما يمكن أن تعرضه الشركة المنتجة في ظل سعر مقداره (15).

ب- رسم دالة العرض.

<u>الجواب:</u>

أ- عندما يكون السعر (15) فإن:

$$y = 4(15)^{\frac{3}{5}}$$

$$\log y = \log 4 + \frac{3}{5} \times \log 15$$

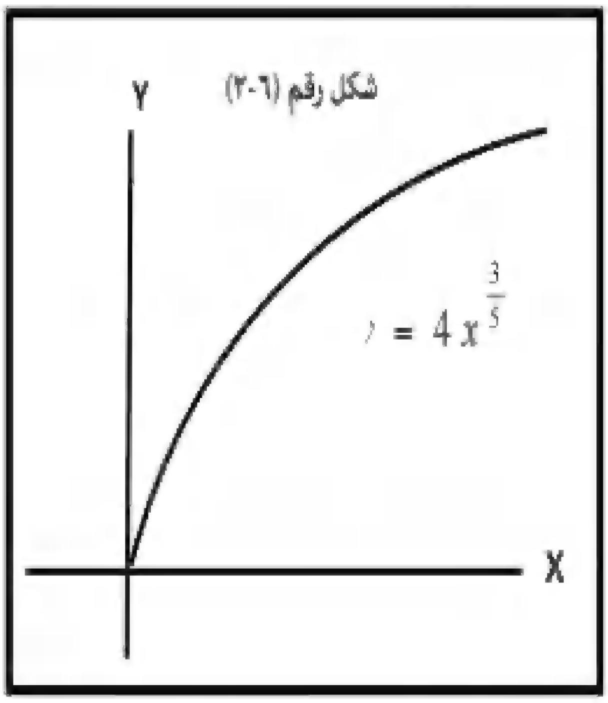
$$= 0.60 + \frac{3}{5}(1.18)$$

$$=1.31$$

$$\therefore\ y = 20.4$$

ب- عند رسم الدالة بإعطاء قيم ل(X) كأن تكون:

(20،15،10) تظهر كما في الشكل رقم (2-6).



٤_٢ توازن السوق Market Equilibrium

لقد مر بنا في الفقرة (٢-٦) من الجزء الأول من الكتاب كيفية إيجاد توازن السوق هندسيا عند نقطة تقاطع منحنى الطلب مع منحنى العرض كما يمكن إيجاد نقطة التقاطع رياضيا عن طريق حل معادلتي العرض والطلب أنياً وبنفس هاتين الطريقتين يمكن إيجاد التوازن المذكور إذا كانت معادلتا العرض والطلب من النوع غير الخطي ولنأخذ مثلا على ذلك:

مثال:

جد سعر وكمية التوازن المتحققة في سوق فيه معادلتا العرض أو الطلب كما يأتي:

$$x^2 - y + 1 = 0$$

$$x^2 + 2y - 8 = 0$$

حيث أن y تمثل الكميات المعروضة أو المطلوبة أما x فتمثل سعر كل وحدة منها.

الجواب:

نحل المعادلتين آنيا كما يلي:

من معادلة العرض لدينا: $y = x^2+1$

وبالتعويض في معادلة الطلب ينتج:

$$x^2 + 2(x^2 + 1) - 8 = 0$$

$$x^2 - 2 = 0$$

$$\therefore x = \sqrt{2}$$

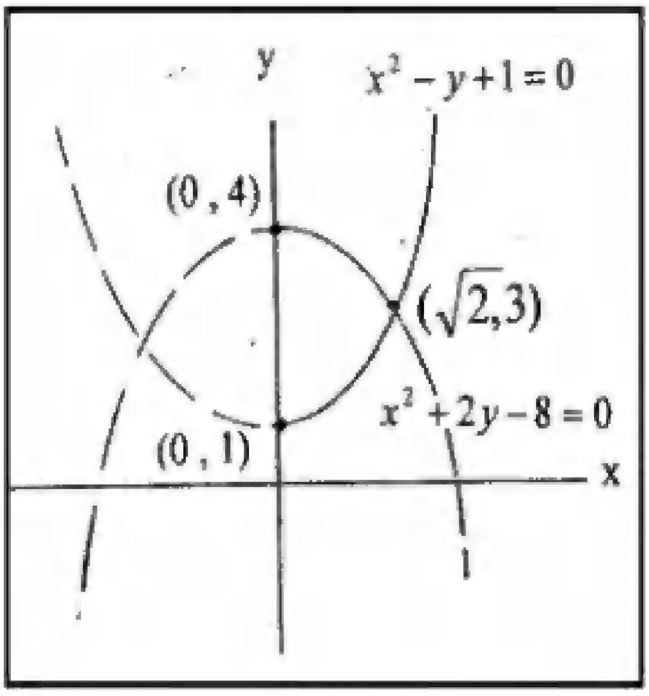
وبالتعويض بإحدى المعادلتين نحصل على:

$$(\sqrt{2})^2 + 2y - 8 = 0$$

$$2y - 6 = 0$$

$$\therefore y = 3$$

إذن نقطة التوازن هي $(x, y) = (\sqrt{2}, 3)$ أي عندما يكون السعر $(\sqrt{2} = 1.4)$ تكون الكميات المطلوبة والمعروضة (3)، (كما يمكن إيجاد التوازن عن طريق الرسم البياني لمعادلتي العرض والطلب كما في الشكل رقم (2-7)



شكل رقم (٧-٢)

٢ـ٥ منحنى الاستهلاك والادخار
Consumption and Saving Curves

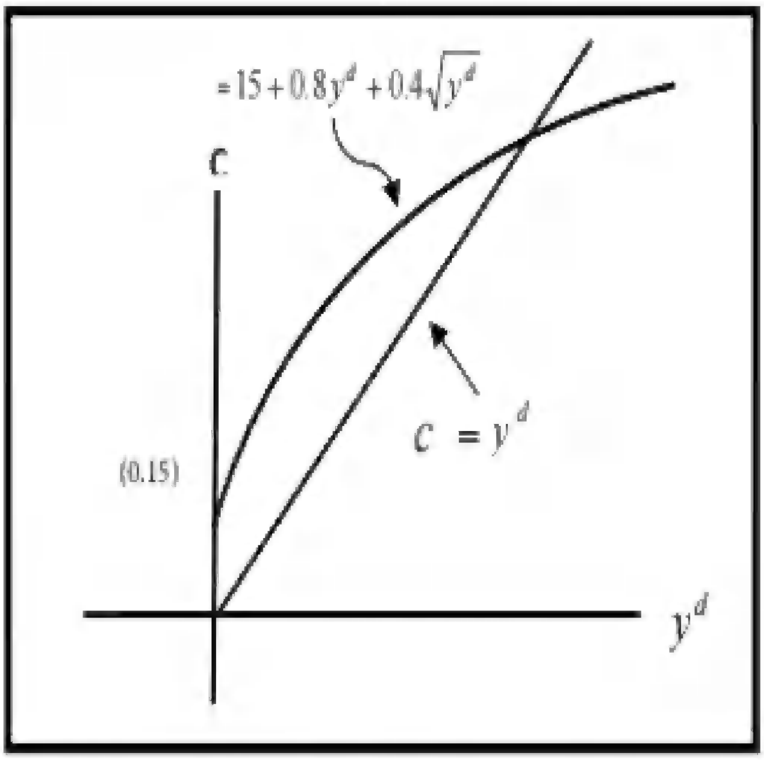
ذكرنا في الفقرة (٢-٢) من الفصل الثاني من الجزء الأول أن الاستهلاك يكون دالة خطية للدخل أو بصيغة أكثر تحديداً للدخل المتاح وكما يأتي:

$$c = f(y^d)$$

ولكن في بعض الأحيان قد يكون الاستهلاك دالة غير خطية للدخل المتاح (y^d) أي أن العلاقة بين الاستهلاك والدخل المتاح قد تأخذ الصيغة الآتية:

$$c = 15 + 0.8y^d + 0.4\sqrt{y^d} \qquad (2\text{-}1)$$

ويظهر من المعادلة المذكورة أنها دالة غير خطية وفي حالة تمثيلها بالرسم البياني تظهر كما في الشكل (2-8):



شكل رقم (٨-٢)

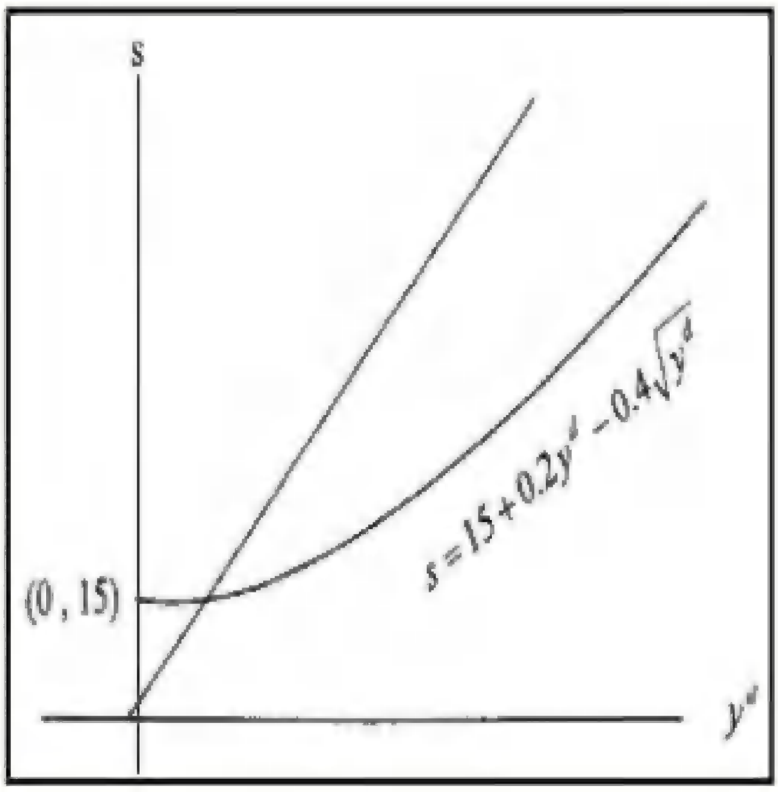
ويظهر من الدالة أن الميل الحدي للاستهلاك هو دالة متناقصة للدخل المتاح أي أن الاستهلاك يميل إلى التناقص النسبي كلما تزايد الدخل المتاح وبالعكس فأن الادخار (S) الذي هو:

$y^d - c$ والمستخرج من الدالة (2-1) هو:

$$s = y^d - (15 + 0.8y^d + 0.4\sqrt{y^d})$$

$$= -15 + 0.2y^d - 0.4\sqrt{y^d}$$

وهو دالة غير خطية ولكنها متزايدة حيث يتزايد الادخار بنسبة أكثر من نسبة تزايد الدخل وكما يظهر في الشكل رقم (9-2)



شكل رقم (٩-٢)

٦_٢ منحنى تحويل الإنتاج Product Transformation Curve

يقصد بمنحني تحويل الإنتاج المنحنى الذي يمثل إمكانية إنتاج اكبر كمية من سلعتين مستقلتين بأسلوب توفيقي بينهما باستخدام كمية محددة من مستلزمات الإنتاج. وعادة ما يأخذ هذا المنحني صورة مجموعة منحنيات كل واحد منها يمثل مستوى معين من مستلزمات الإنتاج.

ولتوضيح عمل هذا المنحنى نأخذ الشكل رقم (10-2) والذي يبين بان هناك مصنعاً ينتج سلعتين هما (x,y) ويستخدم كمية معينة (محددة) من مستلزمات الإنتاج ويستطيع أن يوجه أية نسبة منها نحو إنتاج هاتين السلعتين معاً ولكن بنسب متفاوتة أو

يوجه كامل المستلزمات نحو إنتاج السلعة y أو السلعة x ، فإذا وجه كامل المستلزمات لا نتاج السلعة x فان إنتاج y يتوقف. وإذا وجه كامل المستلزمات لإنتاج السلعة y فان إنتاج x يتوقف.

أو يستطيع التوفيق في توزيع المستلزمات بين السلعتين بتخصيص نسبة معينة من المستلزمات لكل منهما بحيث يحقق المصنع الإنتاج الأفضل حسب أهمية كل سلعة.

ودعنا الآن نستعرض المثال الذي يمثله الشكل المذكور:

مثال (١):

المعادلة الآتية تمثل منحني إنتاج توفيقي من السلعة x ، والسلعة y، جد اكبر إنتاج من x, y يمكن إنتاجه وارسم المنحنى المذكور.

$$3x = 32 - 2y^2$$

الحل:

إذا جعلنا قيمة y = 0

$$3x = 32 - (0) = 32$$

$$\therefore x = \frac{32}{3} = 10.66$$

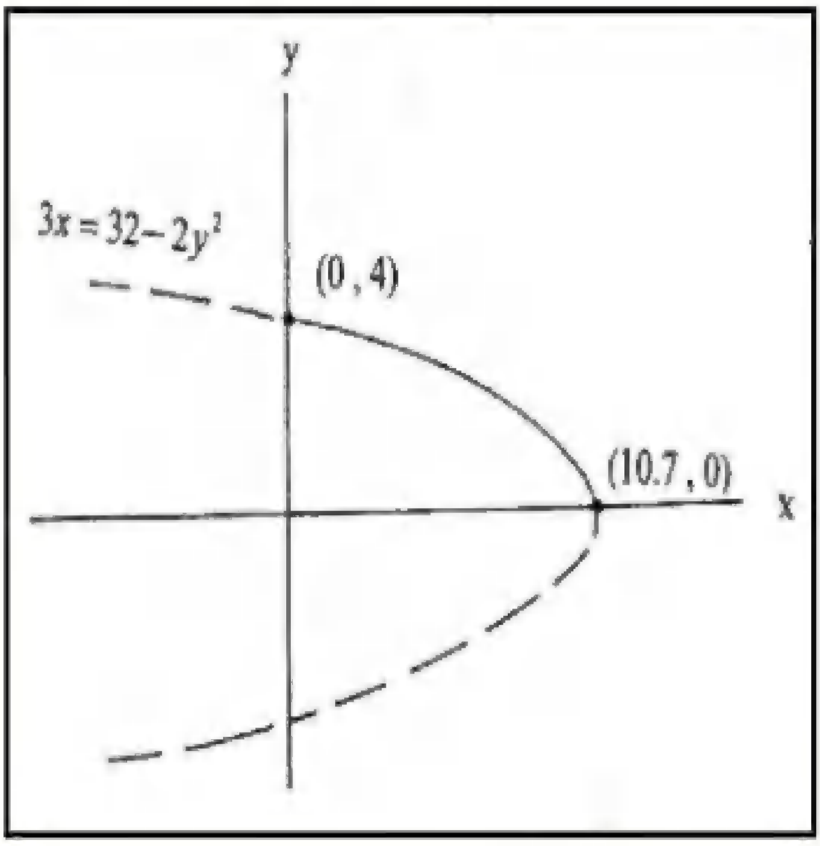
وهذا يعني أن اكبر كمية يمكن إنتاجها من x هي 10.66 وحدات إذا سخرنا كامل المسلزمات لذلك وبالعكس إذا كانت x=0 فإن:

$$\therefore 2y^2 = 32$$

$$\therefore y = \sqrt{16} = 4$$

وهذا يعني أن اكبر كمية يمكن إنتاجها من y هي (4) وحدات أذا سخرنا كامل المستلزمات لذلك وعند إكمال رسم المعادلة تظهر كما في الشكل (10 - 2) أدناه ومن

الطبيعي أن نهمل أجزاء المنحنى المنقطة لكونها خارج الربع الأول الذي تقع فيه التحليلات الاقتصادية.



شكل رقم (٢-١٠)

والآن دعنا نواصل التحليل فإذا أنتج المصنع (5) وحدات من (x) على سبيل المثال فهذا يعني استخدام مستلزمات إنتاج تكفي لإنتاج هذه الكمية أما المتبقي من المستلزمات فيخصص لإنتاج كميات معينة من (y) والتي تساوي (2-9) وذلك من خلال العودة إلى معادلة الإنتاج أعلاه واستخراج قيمة y بعد التعويض بقيمة (x=5) فيها. وهكذا يمكن إجراء أي توزيع لمستلزمات الإنتاج على وحدات من x, y بشرط أن:

$$0 \le y \le 4 \ , \ 0 \le y \le 10.7$$

٧_٢ منحنى التكاليف Cost Curve

إن ابسط الدوال التكاليف هي الدالة التي تنسب تكاليف الإنتاج إلى مجموع الإنتاج أي: $c = f(q)$ ويمكن أن تكون هذه الدالة خطية أو غير خطية وصيغتها غير الخطية تأخذ الشكل الآتي:

$$C = aq^3 - bq^2 + e \qquad (2\text{-}2)$$

حيث أن (C) تمثل التكاليف و (q) مستوى الإنتاج أما a, b, e فهي ثوابت ويمكن أن تأخذ q أية قوة غير (3) و (2) الواردة أعلاه.

أما دالة متوسط التكاليف فتستخرج بقسمة C على q لينتج:

$$\frac{C}{q} = AC = \overline{C} = aq^2 - bq + e$$

ويلاحظ أن (e) بقى كما هو رغم قسمته على q وذلك لكونه ثابت عددي يمثل أي عدد يرد في دالة التكاليف أو دالة متوسط التكاليف حسب العمليات الحسابية التي تجري على المعادلتين. فإذا كانت دالة التكاليف كالآتي:

$$C = 2q^3 - 4q^2 + 10$$

فإن دالة متوسط التكاليف تساوي:

$$\frac{C}{q} = AC = 2q^2 - 4q + \frac{10}{q}$$

وإن الدالتين غير خطيتين وإن $\frac{10}{q}$ هنا تساوي e، وإذا كانت دالة التكاليف كالآتي:

$C = 3q^2 - 5q + 8$ هي دالة غير خطية

فإن دالة متوسط التكاليف هي:

$AC = 3q - 5 + \frac{8}{q}$ وهي دالة خطية

لنأخذ مثالاً توضيحياً:

<u>مثال</u>

أشارت إحدى الدراسات في شركة ما إلى أن متوسط كلفة الإنتاج في المدى القصير يمكن أن يكون وفقاً للمعادلة الآتية:

$$AC = q^2 - 8q + 40$$

حيث أن q يمثل عدد الوحدات المنتجة في حين يثمل (AC) متوسط كلفة إنتاج الوحدة الواحدة.

وأضافت الدراسة أن متوسط الكلفة يكون اقل ما يمكن عندما تنتج الشركة (4) آلاف وحدة والمطلوب ما يأتي:

أ- هل هذه التوصية صحيحة؟

ب- ما نوع المنحني الذي يمثل المعادلة أعلاه؟ ارسم المنحني.

<u>الحل:</u>

(أ) نعيد كتابة المعادلة وهي:

$$AC = q^2 - 8q + 40$$

نستخرج متوسط الكلفة (AC) عندما يكون مستوى الإنتاج (4) آلاف وحدة وهو الذي جاء بالدراسة ويساوي:

$$AC = (4)^2 - 8(4) + 40 = 24$$

وإذا افترضنا أن الشركة رفعت الإنتاج إلى (5) آلاف وحدة فان متوسط التكاليف سيكون:

$$AC = (5)^2 - 8(5) + 40 = 25$$

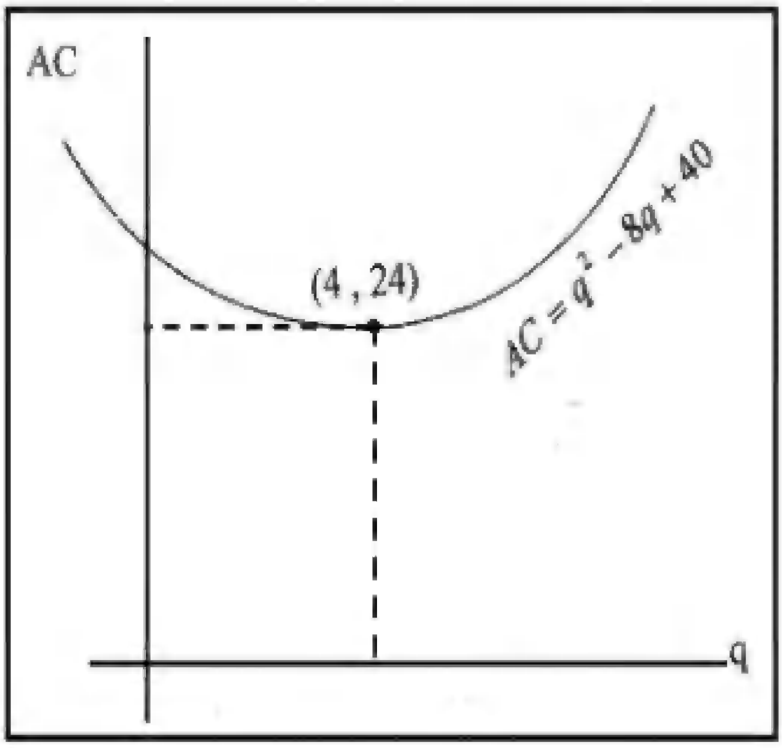
وهو أكثر من المستوى الذي أوصت به الدراسة وهكذا نلاحظ أن متوسط التكاليف يزداد ارتفاعاً إذا زاد الإنتاج إلى (6) آلاف وحدة ويستمر بالارتفاع كلما زاد بعد هذا المستوى. كذلك إذا انخفض الإنتاج إلى (3) آلاف وحدة فان متوسط التكاليف يكون:

$$AC = (3)^2 - 8(3) + 40 = 25 \quad \text{أيضاً}$$

ويرتفع كذلك كلما انخفض عدد الوحدات المنتجة.

ومن ذلك ينتج أن توصية الدراسة صحيحة حيث أن اقل متوسط تكاليف هو (24) عندما يكون مستوى الإنتاج (4) آلاف وحدة.

(ب) أما المنحني فهو من نوع (القطع المكافئ) كما موضح في الشكل (2-11).



شكل رقم (٢-١١)

٢-٨ قانون باريتو في توزيع الدخل Pateto's Law

افترض العالم الاقتصادي الإيطالي فلفريدو باريتو (1923 - 1848) القانون الآتي في توزيع الدخل.

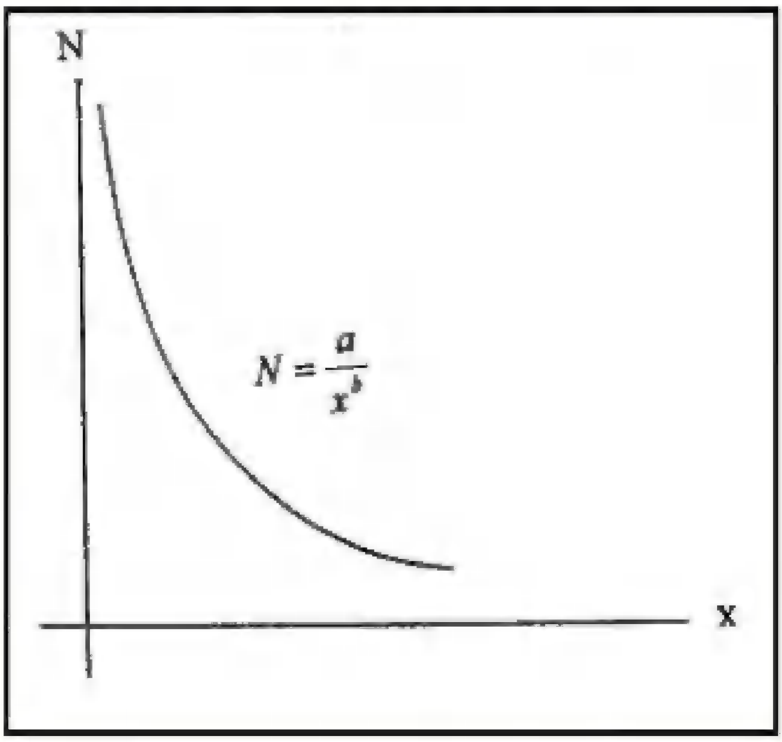
$$N = aX^{-b} \text{ أو } N = \frac{a}{X^{b}} \qquad (2\text{-}3)$$

حيث أن (N) تمثل ذلك العدد من أفراد المجتمع الذي حجم سكانه (a) والذين تزيد دخولهم عن (x) أما (b) فهو معلمة سكانية عادة ما يساوي (1.5) تقريباً.

ويلاحظ من المعادلة (القانون): إن منحناها من نوع القطع الزائد ولهذا فهي مقبولة عندما: $a \geq N > 0$ وكذلك أ د ق م > $X > 0$ حيث أن أ د ق م هي أعلى دخل في المجتمع.

وعند اختبار القانون أعلاه من خلال بيانات عن الدخل في مجتمعات مختلفة وجد أن هذا القانون مفيد ودقيق إلى حد ما كما وجد أن القيمة التي اقترحها باريتو لـ (b) والتي مقدارها (1-5) تختلف من مجتمع إلى آخر ولكنها بشكل عمومي نسبة تقريبية جيدة.

والشكل رقم (2-12) يوضح منحني القانون:



شكل رقم (٢-١٢)

مثال:

إذا كان قانون باريتو في توزيع الدخل لمجموعة سكانية معينة هو:

$$N = \frac{250 \times 10^9}{X^{\frac{3}{2}}}$$

استخرج ما يأتي:

أ- عدد الأفراد الأغنياء (المليونيرية).

ب- عدد الأفراد الذين تزيد دخولهم عن (2500) فرداً.

ج - عدد الأفراد من ذوي الدخل المنخفض (الأقل دخلاً) في مجتمع يبلغ عدد ذوي الدخول العالية فيه (16) فرداً.

الحل:

أ- عدد المليونيرية:

$$N = \frac{250 \times 10^9}{(100^6)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{250 \times 10^9}{10^9} = 250$$ مليونيراً

ب- عدد الذين تزيد دخولهم عن (2500):

$$N = \frac{250 \times 10^9}{(2500)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{250 \times 10^9}{50^3}$$

= 2000 000 فرداً

ج- عدد الإفراد من ذوي الدخل المنخفض (الأقل) في مجتمع يبلغ عدد ذوي الدخول الأعلى فيه (16) فرداً.

$$16 = \frac{250 \times 10^9}{X^{\frac{3}{2}}}$$

$$X^{\frac{3}{2}} = \frac{2 \times 5^3 \times 10^9}{2 \times 2^3}$$

$$X = \frac{5^2 \times 10^6}{2^2} = 6250000$$ فرداً

تمارين (١-٢)

١- إذا كان قانون باريتو في توزيع الدخل كالآتي:

$$N = \frac{27 \times 10^8}{x^{\frac{3}{5}}}$$

جد ما يأتي:

أ- عدد الذين تزيد دخولهم (64000) ثم عدد الذين تزيد دخولهم عن (2000000) والذين تقع دخولهم بين هذين العددين.

ب- ما هو عدد الأقل دخلاً في مجتمع عدد الأعلى دخلاً فيه (100) فرداً.

٢- إذا كان قانون باريتو في توزيع الدخل لمجتمع ما يأخذ الصيغة الآتية:

$$N = \frac{125000}{X^{\frac{3}{2}}}$$

جد:

أ- عدد الذين تزيد دخولهم عن (20).

ب- عدد الذين دخولهم تقع بين (50)، (75).

٣- بين أي من المنحنيات الآتية يمثل منحنى الطلب وأي منها يمثل منحنى العرض وحدد توازن السوق مبيناً السعر والكمية عند مستوى التوازن بالطريقتين الجبرية والرسم البياني.

$$x = 12 - 3y$$

$$x = 5 - y^2$$

$$x - 16y - 8y^2 = 0$$

$$x + y^2 + 2y - 18 = 0$$

حيث أن x يمثل وy الكميات المطلوبة أو المعروضة.

٤- المعادلة الآتية تمثل منحنى تحويل الإنتاج لسلعتين هما (x,y) والمطلوب إيجاد أعلى كمية من كلا السلعتين يمكن إنتاجها وفق هذا المنحنى:

$$x + 4y^2 - 100 = 0$$

ثم ارسم منحنى تحويل الإنتاج بيانياً.

٥- أعطيت دالة الاستهلاك التالية: $C = 0.85yd^{\frac{5}{6}} + 120$

استخرج مستوى الاستهلاك للفترات (1,2,3,4) أذا كان مستوى الدخل حسب الفترات كالآتي:

الفترة	الدخل
1	10000
2	2000
3	3000
4	4000

٦- إذا كان منحني متوسط التكاليف هو:

$$AC = 2q^2 - 5q + 30$$

جد اقل متوسط كلفة إنتاج يمكن أن يبلغه المنتج. ثم ارسم المنحني وبين نوعه.

٩_٢ منحنى الفائدة المركبة Compound Interest Cover

لحساب الفائدة المركبة لأي مبلغ نفترض أن سعر الفائدة (interest rate) هو 100% سنوياً تدفع (q) من المرات في السنة فان مبلغاً قدره (x) ويسمى الأصل يصبح بعد (n) من السنوات حسبما يأتي:

$$y = x(1 + \frac{i}{q})^{nq} \qquad (2\text{-}4)$$

وعندما تكون قيمة (q) كبيرة فأن y تؤول إلى: $y = Xe^{in}$ حيث أن:

e = 2.718 وهو أساس اللوغاريتم الطبيعي.

ويمكن تطوير القاعدة أعلاه عندما تدفع الفائدة 100% سنوياً فأن جملة المبلغ (المبلغ الأصلي مع فائدته) y_1 نهاية السنة الأولى تكون:

$$y_1 = x + ix = x(1 + i)$$

والجملة y2 في نهاية السنة الثانية تكون:

$$y_2 = [x(1+i)][1+i] = x(1+i)^2$$

والجملة y5 نهاية السنة الخامسة تكون:

$$y_5 = x(1+i)^5$$

وجملة (y) بعد نهاية n من السنوات تكون:

$$y_n = x(1+i)^n$$

وعندما تدفع الفائدة (q) من المرات خلال السنة لذلك فأن سعر الفائدة عند أي فترة من الفترات

هو $100\frac{i}{q}\%$ وعدد الفترات يكون nq ولهذا فأن جملة المبلغ بعد n من السنوات هو:

$$y = x(1+\frac{i}{q})^{nq}$$

والآن ستعرض مثالاً توضيحياً:

مثال:

أودع احدهم مبلغا" في حساب التوفير قدره (15000) بسعر الفائدة قدرها ١٠ % فكم يصبح المبلغ بعد (٥) سنوات إذا كانت:

أ- الفائدة تدفع سنوياً.

ب- الفائدة تدفع كل فصل.

الجواب:

أ)

$$y = x(1+i)^n$$

$$= 15000(1+0.10)^5$$

$$\log y = \log 15000 + 5 \log 1.10$$

$$= 4.1761 + (5)(0.04139)$$

$$= 4.38305$$

$$y = 24157.39$$

ب)

$$y = x(1+\frac{i}{q})^{nq}$$

$$=15000(1+\frac{0.10}{4})^{20}$$

$$\log y = \log 15000 + 20 \log 1.025$$

$$\log y = 4.1761 + (20)(0.01072)$$

$$\log y = 4.3905$$

$$y = 24575.37$$

٢_١٠ منحنيات الإنتاج Production Curves

تبين منحنيات و دوال الإنتاج العلاقة بين الإنتاج ومستلزماته. أي توضح الكميات المنتجة كدالة لعوامل الإنتاج.ولهذا تأخذ دالة الإنتاج الصيغة الآتية:

$$Q = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (2\text{-}5)$$

حيث أن Q هو مستوى الإنتاج أما $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ فهي عوامل الإنتاج ومستلزمه.

وإذا كانت العلاقة غير خطية بين الإنتاج ومستلزماته فأن الصيغة (2-5) يمكن أن تكتب كالآتي:

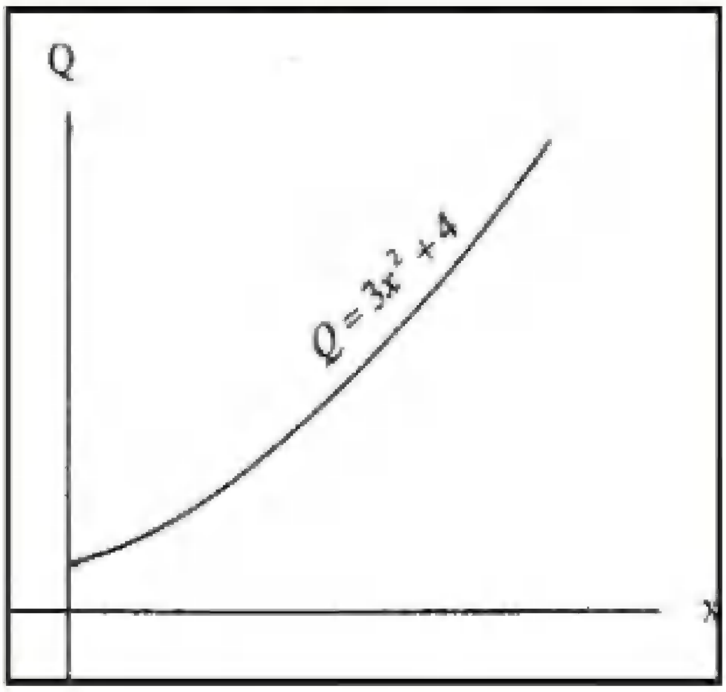
$$Q = a_1 x_1^{b1} + a_2 x_2^{b2} + \ldots + a_n x_n^{bn} \qquad (2\text{-}6)$$

حيث أن $a_1, a_2, \ldots, a_n$ هي ثوابت، $b_1, b_2, \ldots, bn$ هي قوى لمستلزمات الإنتاج $x_1, x_2, \ldots, x_n$. وعلى سبيل المثال تأخذ الدالة (2-6) الصيغة الآتية:

$$Q = 2x^3 + y^2 - 5z$$

حيث يظهر في هذه الدالة مساهمة ثلاث مستلزمات إنتاج في العملية الإنتاجية هي x,y,z. والدالة هي من الدوال غير الخطية ومن الواضح أن رسم هذه الدالة بيانياً يحتاج إلى أربعة أبعاد وهو أمر صعب ولكن حل المعادلة لا يجاد قيمة Qلا يحتاج إلا لبيانات عن كل من x,y,z و لا جل إعطاء صورة مبسطة عن دالة الإنتاج غير الخطية عن طريق الرسم البياني نتناول الدالة الآتية والتي تظهر في الشكل (2-13):

$$Q = 3x^2 + 4$$



شكل رقم (٢-١٣)

وكما يظهر من الشكل (2-13) أن هذه الدالة متزايدة حيث يتزايد الإنتاج Q بنسبة مضطردة تزيد عن نسبة تزايد مستلزمات الإنتاج x. مع الإشارة إلى أن العدد (4) ظهر في الدالة هو ثابت يمثل نفقات التشغيل الضرورية التي تصرف دون أن يكون هناك إنتاج. ومن ابسط دوال الإنتاج تلك التي تفترض أن الإنتاج يتم باستخدام كميات من العمل ورأس المال وهذه العلاقة لا تتغير في المدى القصير. ولكن في المدى الطويل يحدث التغير و تضحي الدالة أكثر تعقيداً لان هذا التغير يحدث بعد الأخذ بالاعتبار التطور التقني والتعلم والمهارة المكتسبة عن طريق العمل وغيرها. وتبدو دالة الإنتاج بشكلها المبسط كما يأتي:

$$Q = f(L, K) \qquad (2\text{-}7)$$

حيث أن Q هو الإنتاج و L تمثل العمل K رأس المال. ومن الدوال التي تفترض أن العمل ورأس المال هما العاملان اللذان يحددان مستوى الإنتاج هي دالة كوب - دوكلاص وصيغتها كالآتي:

$$Q = aL^b K^c \qquad (2\text{-}8)$$

حيث أن b,c هي معالم موجبة و a ثابت ، Q تمثل الإنتاج و L العمل و K رأس المال. ومن خصائص هذه الدالة أن حجم الغلة يرتبط بطبيعة العلاقة بين b,c فإذا كان:

b + c = 1 فان حجم الغلة يكون ثابت أي أن Q يتزايد بنفس النسبة التي يتزايد فيها كل من b,c.

b + c < 1 فان حجم الغلة متناقص أي أن Q يتناقص بنسبة اقل من نسبة التزايد كل من b,c.

b + c > 1 فان حجم الغلة متزايد أي أن Q يتزايد بنسبة أكثر من نسبة تزايد كل من b,c.

وفي الحالة التي يكون فيها b + c > 1، b + c < 1 فان الدالة تكون دالة غير خطية أما إذا كان b+ c = 1 فأن الدالة في هذه الحالة تكون خطية.

مثال (١):

ماذا يكون عليه مستوى الإنتاج في الفترة القادمة إذا تضاعفت كمية العمل ورأس المال عما هي علية ألان بعد أن كانت L = 5 و K = 4 في دالة الإنتاج الآتية:

$$Q = 3L^{0.6} K^{0.8}$$

الجواب:

في الفترة الأولى كان مستوى الإنتاج كما يأتي:

$$Q = 3(5)^{0.6}(4)^{0.8}$$

$$= 3(2.63)(3.03)$$

$$= 23.91$$

أما في الفترة القادمة فقد تضاعفت نسبة المستخدمات لتصبح:

$$K = 8, L = 10$$

ولهذا فإن مستوى الإنتاج يكون:

$$Q = 3(10)^{0.6}(8)^{0.8}$$

$$= 3(3.98)(5.28)$$

$$= 63.04$$

ومن النتائج يظهر بان الإنتاج قد تزايد بنسبة 164% في حين تزايدت مستلزمات الإنتاج من العمل ورأس المال بنسبة 100% أي أن الغلة متزايدة لأن $b + c = 0.6 + 0.8 = 1.4$ وبصيغة أخرى:

$$b + c > 1$$

مثال (٢):

في المثال السابق ماذا يكون عليه مستوى الإنتاج في الفترتين إذا كانت دالة الإنتاج بالصيغة الآتية:

$$Q = 3L^{0.2}K^{0.5}$$

الجواب:

في الفترة الأولى يكون مستوى الإنتاج كالآتي:

$$Q = 3(5)^{0.2}(4)^{0.5}$$

$$= 3(1.38)(2)$$

$$= 8.28$$

أما في الفترة الثانية فان الإنتاج يكون:

$$Q = 3(10)^{0.2}(8)^{0.5}$$

$$= 3(1.58)(2.83)$$

$$= 13.4$$

ويظهر من النتائج أن الإنتاج قد تزايد وبنسبة 62% وهي أقل من نسبة تزايد مستلزمات الإنتاج من العمل ورأس المال التي تزايدت بنسبة 100% وذلك لان $b+c<1$ وبهذا فان حجم الغلة هو من الحجم المتناقص.

<u>مثال(٣):</u>

أحسب مستوى الإنتاج في الفترتين وبموجب المؤشرات الواردة في المثال (١) إذا كانت دالة الإنتاج كما يأتي:

$$Q = 3L^{0.7}K^{0.3}$$

<u>الجواب:</u>

مستوى الإنتاج في الفترة الأولى هو:

$$Q = 3(5)^{0.7}(4)^{0.3}$$
$$= 3(3.08)(1.5)$$
$$= 14.05$$

أما مستوى الإنتاج في الفترة الثانية فهو:

$$Q = 3(10)^{0.7}(8)^{0..3}$$

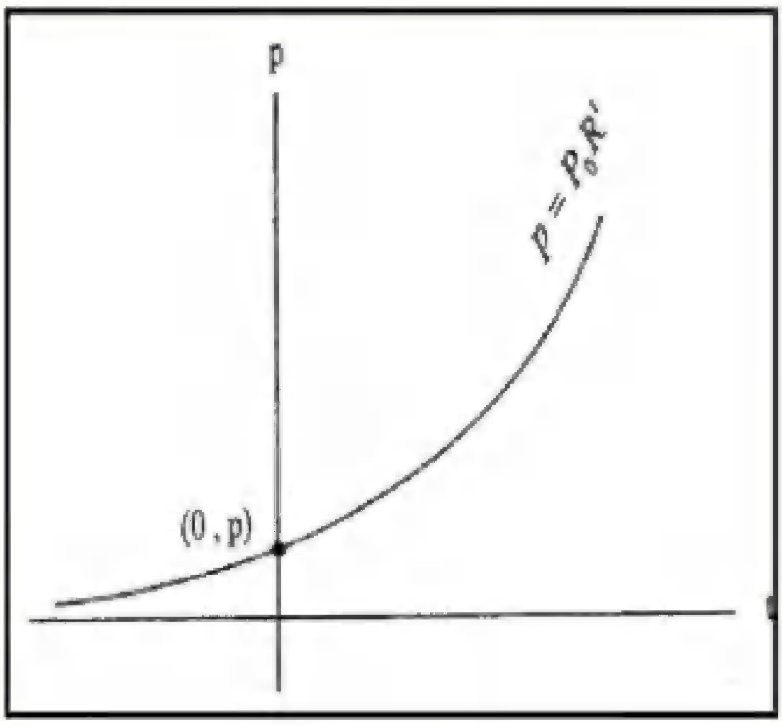
$$= 3(5.01)(1.87)$$

$$= 28.10$$

ومن النتائج يتبين أن الإنتاج قد ازداد بنسبة 100% وهي نفس نسبة زيادة العمل ورأس المال لان $b+c=1$ وعندها يكون <u>حجم الغلة من الحجم الثابت</u>.

١١_٢ دالة النمو الإداري

تستخدم هذه الدالة لوصف النمو في الجهاز الإداري المبكر لمشروع أو منشأة ذات النمو المتسارع مع الأخذ بالاعتبار أن يكون استخدامها حذراً وضمن فترة محدودة وذلك بسبب طبيعة المنحني الذي يمثله حيث لا يوجد تحاذٍ له مع المحور العمودي من الأعلى كما في الشكل رقم (١٤-٢).



شكل رقم (٢-١٤)

أما صيغة الدالة فهي:

$$P = P_0R^t \qquad (2\text{-}9)$$

حيث أن P يمثل عدد الأفراد العاملين في الشركة في الفترة t ، أما P_0 . فهو العدد الابتدائي للعاملين في الوقت (0)، R>0 هو معدل النمو. وبالنظر لطبيعة المنحنى كما ذكرنا أعلاه فان استعمالات هذه الدالة ينبغي أن تتم بعناية كبيرة في التحليلات المختلفة ولنوضح ذلك في المثال الآتي:

مثال:

ابتدأت إحدى شركات صنع أجهزة التلفزيون عملها بتشغيل (10) فنيين وفي نهاية كل سنة كان كل واحد من العاملين يوظف (4) مساعدين له. فكم يصبح عدد العاملين في هذه الشركة بعد مضي (7) سنوات؟

$P = P_0R^t$

$= (10)(4)^7$

$= (10)(16384)$

$= 163840$ مشتغلاً

أما إذا وظف كل عامل مساعدين أثنين فان عدد العاملين سيبلغ بعد (7) سنوات ما يأتي:

$$P = P_0 R^t$$

$$= (10)(2)^7$$

$$= 1280$$ مشتغلاً

٢_١٢ نموذج دومار في نمو الدخل القومي Domar Growth Model

يتلخص نموذج دومار في نمو الدخل القومي بصيغة المعادلة الآتية:

$$y = y_0 e^{(\alpha/\beta)t} \quad (2\text{-}10)$$

حيث أن y تمثل الدخل الوطني و y_0 الدخل الوطني في بداية الفترة و e أساس اللوغاريتيم الطبيعي أما $\alpha, \beta > 0$ وهي معالم ثابتة و t الزمن.

مثال:

إذا كان الدخل الوطني في سنة 1993 (8000) فكم سيكون عليه الدخل الوطني في سنة 1999 مع العلم أن α, β تساوي 0.42 و 0.04 على التوالي.

الجواب:

بموجب صيغة دومار (2-10) يحسب الدخل القومي في سنة 1999 كالآتي:

حيث أن t = 6 :إذن:

$$y = (8000)^{(0.04/0.42)6}$$

$$= (8000)e^{0.571}$$

$$= (8000)(1.77)$$

$$= 14160$$

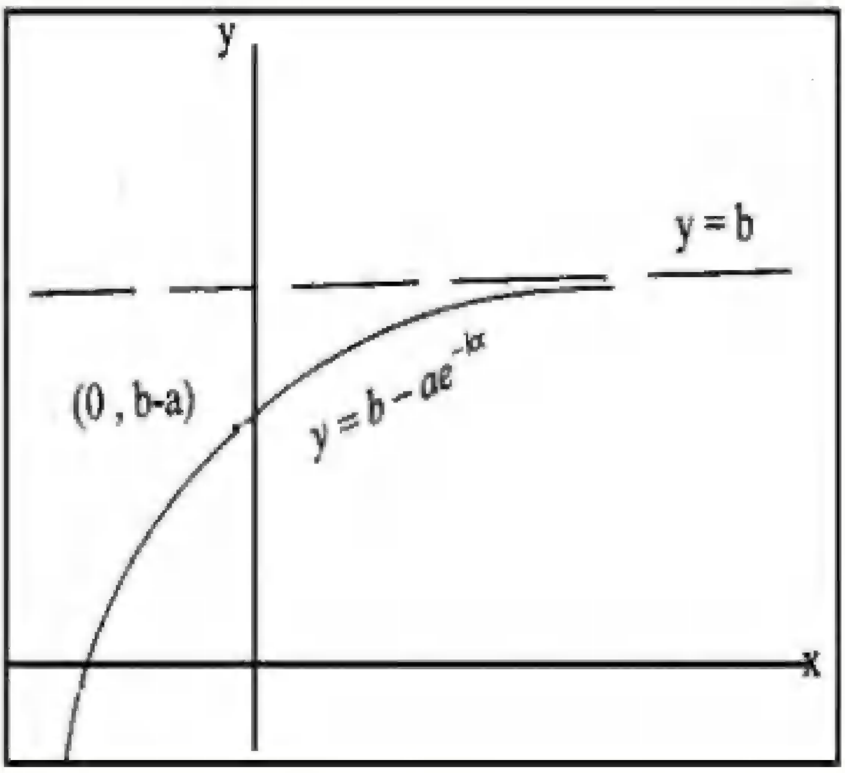
أي أن الدخل الوطني السنوي نما خلال الستة سنوات بمعدل سنوي قدره (10%) تقريبا".

٢_١٣ منحنى التعلم واستعمالاته الاقتصادية Learning Curve

رغم أن هذا المنحني يستخدم في حقل العلوم النفسية والتربوية إلا انه يحتل مجالا مهماً في الاستعمالات الاقتصادية كدالة الإنتاج ودالة التكاليف وغيرها. ويأخذ هذا المنحني صيغة المعادلة الآتية:

$$y = b - ae^{-kx} \qquad (2\text{-}11)$$

حيث أن b, a, k هي ثوابت موجبة أما y فتمثل درجة التعلم و x عدد الخاضعين للتعليم. أما سلوك المنحني عند تمثيله بيانياً فيبدأ بالارتفاع المتسارع ثم يتسطح للخارج وأخيراً يدنو من محاذيه y = b كما في الشكل رقم (2-15) الآتي:



شكل رقم (٢-١٥)

مثال(١):

إذا كانت التكاليف السنوية لصيانة إحدى معامل النسيج y تنسب إلى متوسط تشغيل المعمل الشهري (محسوباً بمئات من الساعات) وتحسب بموجب المعادلة الآتية:

$$y = 45 - 27e^{(-0.04)x}$$

فما التكاليف السنوية للصيانة عند تشغيل المعمل (3) مائة ساعة كمتوسط في الشهر؟

الجواب:

$$y = 45 - 27e^{(-0.04)x}$$

$$= 45 - 23.947$$

$$= 21.053$$

مثال (٢):

قدرت تكاليف الإنتاج لمصنع معين بالمعادلة الآتية:

$$c = 80 - 50e^{-0.01x}$$

حيث تشير x إلى عدد الوحدات المنتجة، c إلى التكاليف، والمطلوب:

أ- حساب التكاليف الثابتة للمصنع.

ب- ماهية نسبة تكاليف الإنتاج الثابتة عندما يكون الإنتاج 120 وحدة.

الجواب:

أ- حساب التكاليف الثابتة:

$$c = 80 - 50e^{-0.01(0)}$$

$$= 80 - 50(1)$$

$$= 30$$

ملاحظة:

عند حساب التكاليف الثابتة بموجب المعادلة أعلاه نفترض أن المنشأة جاهزة التشغيل أي أن الإنتاج x=0.

ب- نسبة التكاليف الثابتة إلى مجموع التكاليف عندما يكون الإنتاج (120) وحدة هي:

$$c = 80 - 50e^{-0.01(120)}$$

$$= 80 - 50(2.718)^{-1.2}$$

$$= 80 - 50(0.3)$$

$$= 65$$

إذن نسبة التكاليف الثابتة إلى التكاليف الكلية تساوي: $\frac{30}{65} = 46\%$

تمارين (٢ - ٢)

١- لدى احدهم مبلغ (12000) دينار مودع في حساب التوفير ويرغب إبقاءه في المصرف مدة (15) سنة ولديه خياران الأول: أن يكون سعر الفائدة 6% نصف سنوياً والأخر 5% كل فصل فأي الخيارين أفضل له ؟

٢- تعمل شركة وفق دالة التكاليف بالصيغة الآتية:

$$c = 40 - 35e^{-0.04x}$$

حيث أن c تمثل التكاليف و x كميات الإنتاج - احسب ما يأتي:

أ- التكاليف الثابتة للشركة.

ب- نسبة التكاليف الثابتة إلى التكاليف الكلية إذا كان مستوى الإنتاج (150) وحدة.

٣- إذا كانت دالة الإنتاج في إحدى المصانع هي:

$$Q = 10L^{0.7}K^{0.9}$$

بين فيما إذا كان هذه الدالة خطية أم غير خطية ولماذا؟

ثم احسب مستوى الإنتاج إذا كان العمل (15) ورأس المال (12). وكم يصبح مستوى الإنتاج إذا تضاعفت كل من وحدات العمل ورأس المال.

٤- ينمو الدخل الوطني لدولة ما حسب المعادلة الآتية:

$$y = y_{\circ}e^{(\alpha/\beta)t}$$

فإذا كان 4000=y وحدة و α, β تساوي $\beta = 0.55$ و $\alpha = 0.02$ على التوالي فكم يصبح الدخل الوطني بعد (10) سنوات ؟

٥- كان عدد العاملين في مصنع للزجاج عند افتتاحه (50) عاملاً وبدأ المصنع يضيف مع كل عاملين عاملاً واحداً في نهاية كل سنة - احسب عدد العاملين بعد (8) سنوات.

الفصل الثالث

المنحنيات المثلثية

Curves Trigonometric

المنحنيات المثلثية

Curves Trigonometric

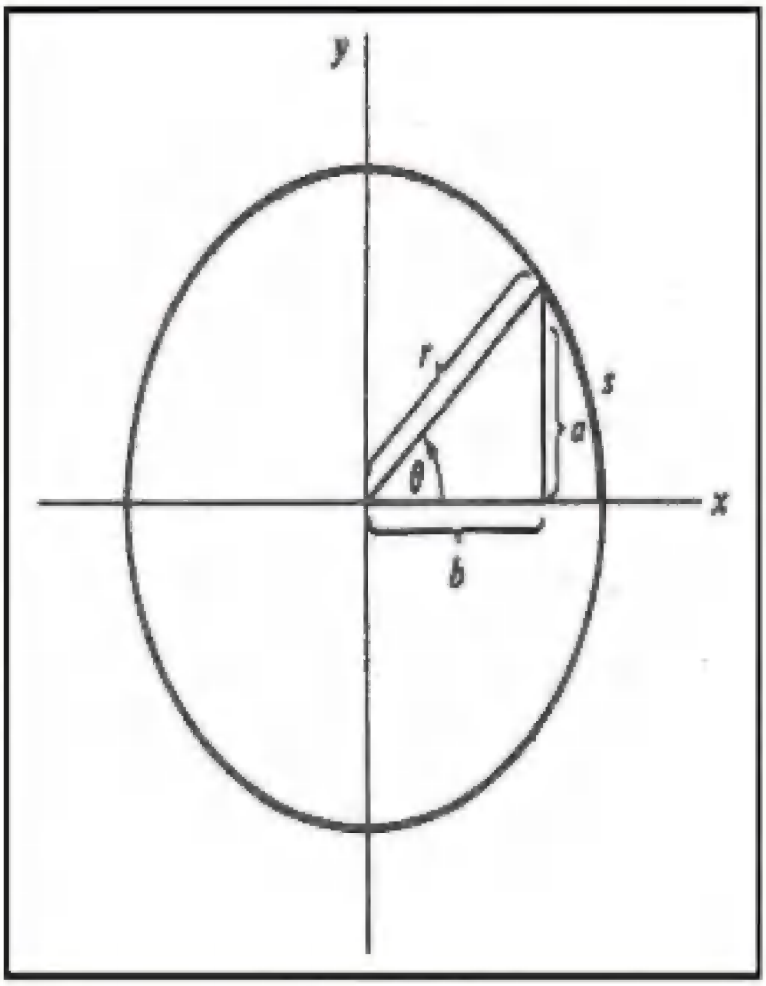
٣ـ١ الدالة المثلثية

تعرف الدالة المثلثية للزاوية θ بأنها الدالة التي تحوي على: جيب θ($\sin\theta$) وجيب تمام θ($\cos\theta$) وظل θ($\tan\theta$) وقاطع تمام θ($\csc\theta$) وقاطع الزاوية θ($\sec\theta$) وأخيراً ظل تمام θ($\cot\theta$).

وعندما تكون الزاوية θ في مركز دائرة نصف قطرها r ويجري قياس الزاوية باتجاه مخالف لاتجاه عقرب الساعة فان الدوال المثلثية للزاوية θ تتحدد بالمعادلات الآتية كما في الشكل رقم (3-1):

$$(3\text{-}1)\ \ldots\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{sc}\,\theta = \dfrac{r}{a} & \sin\theta = \dfrac{q}{r} \\[2ex] \text{ec}\,\theta = \dfrac{r}{b} & \text{os}\,\theta = \dfrac{b}{r} \\[2ex] \text{ot}\,\theta = \dfrac{b}{a} & \text{an}\,\theta = \dfrac{a}{b} \end{array}\right.$$

وتسمى كل من sin , csc: بالدوال المشتركة لأنها تشترك في كل من a , r كذلك بالنسبة إلى cos , sec و tan , cot. أما إذا قيست الزاوية باتجاه عقرب الساعة بدأً من المحور x الموجب. فان الدوال المثلثية تصبح ذات قيمة سالبة.



شكل رقم (١-٣)

وإذ ما تذكرنا نظرية فيثاغورس التي تقول أن المربع المنشأ على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين فان:

$$r^2 = a^2 + b^2$$

واستناداً إلى ذلك يمكن إثبات بعض المتطابقات المثلثية نذكر منها ما يأتي:

١- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

<u>البرهان:</u>

بقسمة طرفي المعادلة $r^2 = a^2 + b^2$ على r^2 ينتج:

$$\frac{r^2}{r^2} = \frac{a^2}{r^2} + \frac{b^2}{r^2}$$

$$1 = \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2$$

$$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \text{(مع أعادة الترتيب)}$$

ومنها نشتق: $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ **(3-2)**

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

<u>البرهان:</u>

بقسمة طرفي المعادلة $r^2 = a^2 + b^2$ على a^2 ينتج:

$$\frac{r^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

$$\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$$

وبإعادة الترتيب:

$$\therefore 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

ومنها نشتق: $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ **(3-3)**

$$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

<u>البرهان:</u>

بقسمة طرفي المعادلة $r^2 = a^2 + b^2$ على b^2 ينتج:

$$\frac{r^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2}$$

$$\left(\frac{r}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1$$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta + 1$

وبإعادة الترتيب: $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

ومنها نشتق: $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ **(3-4)**

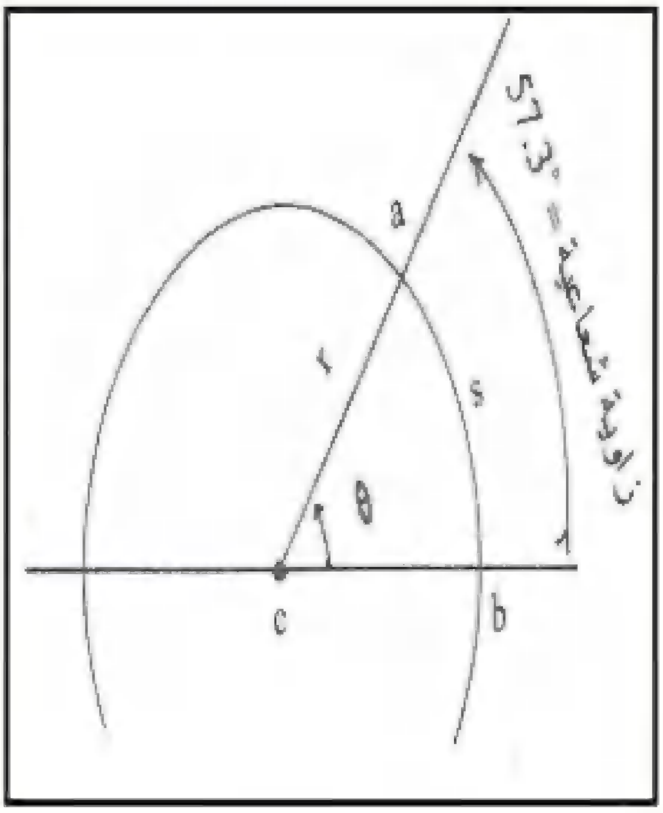
و $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

٢_٣ قياس الزاوية θ

تقاس الزاوية θ بالدرجات كان يقال أن $\theta = 120^\circ$ أو $\theta = 30^\circ$ وغير ذلك أو تقاس θ بالزوايا الشعاعية. إن القياس بالدرجات معروف ومتداول أما القياس بالزوايا الشعاعية فربما يحتاج إلى بعض الشرح:

يراد بالزوايا الشعاعية تلك الزاوية المحدودة بنصف قطري دائرة اللذان يقطعان قوس يساوي في طوله طول نصف قطر الدائرة.

لنتأمل الشكل رقم (3-2).



شكل رقم (٢-٣)

حيث نلاحظ أن القوس ab يقابل الزاوية ويساوي في طوله طول كلاً من ac و bc أي أن القوس

S = نصف القطر r

وما دام محيط الدائرة = القطر × النسبة الثابتة التي يرمز لها بالحرف π.

∴محيط الدائرة = 2r π =2 π r

أي أن محيط الدائرة يساوي π 2 من الزوايا الشعاعية. فعندما تكون الزاوية $\theta = 360^\circ$ فان عدد

الزوايا الشعاعية يكون π 2 أو $2 \times \frac{22}{7} = \frac{44}{7} = 6.2857$ زاوية شعاعية أي أن محيط الدائرة يساوي

6.28575 زاوية شعاعية أما قياس كل زاوية شعاعية فيساوي $\frac{360}{2\pi} = \frac{360}{6.2857} = 57.3^\circ$ أو يساوي

$$\frac{180^\circ}{\pi} = 57.3^\circ$$

ويلاحظ أنه عندما تكون $\theta = 180^\circ$ فإن عدد الزوايا الشعاعية $\pi = 3.1428$ وعندما تكون

$\theta = 90^\circ$ فان عدد الزوايا الشعاعية $\frac{\pi}{2} = 1.5714$ وعندما تكون $\theta = 45^\circ$ فان عدد الزوايا

الشعاعية = $\frac{\pi}{4}$ وهكذا.

والآن إذا كان قياس الزاوية θ معروفاً فيمكن حساب ما يقابلها من الزوايا الشعاعية وذلك كما مبين أدناه:

عدد الزوايا الشعاعية = قياس الزاوية θ \ قياس الزاوية الشعاعية

$$\frac{\theta}{\frac{180}{\pi}} = \frac{\theta\pi}{180} \qquad (3\text{-}5)$$

لنأخذ بعض الأمثلة:

<u>مثال (١):</u>

إذا كانت $\theta = 140^\circ$ فإن عدد الزوايا الشعاعية:

$S = \frac{\theta\pi}{180^\circ} = \frac{140\pi}{180} = 2.44$ وتكتب عادة بالصيغة العامة كما يلي:

$$\frac{140\pi}{180^{\circ}} = \frac{7\pi}{9}$$

<u>مثال (٢):</u>

إذا كانت $\theta = 350^{\circ}$ فما هو عدد الزوايا الشعاعية:

$$S = \frac{\theta\pi}{180^{\circ}} = \frac{350\pi}{180} = \frac{35\pi}{18}$$

<u>مثال (٣)</u>

إذا كانت $\theta = 120^{\circ}$ فما هو عدد الزوايا الشعاعية:

$$S = \frac{\theta\pi}{180^{\circ}} = \frac{120}{180} = \frac{2\pi}{3}$$

<u>مثال (٤)</u>

احسب عدد الزوايا الشعائية إذا كانت $\theta = -75^{\circ}$

$$S = \frac{\theta\pi}{180^{\circ}} = \frac{-75^{\circ}\pi}{180^{\circ}} = -\frac{5\pi}{12}$$

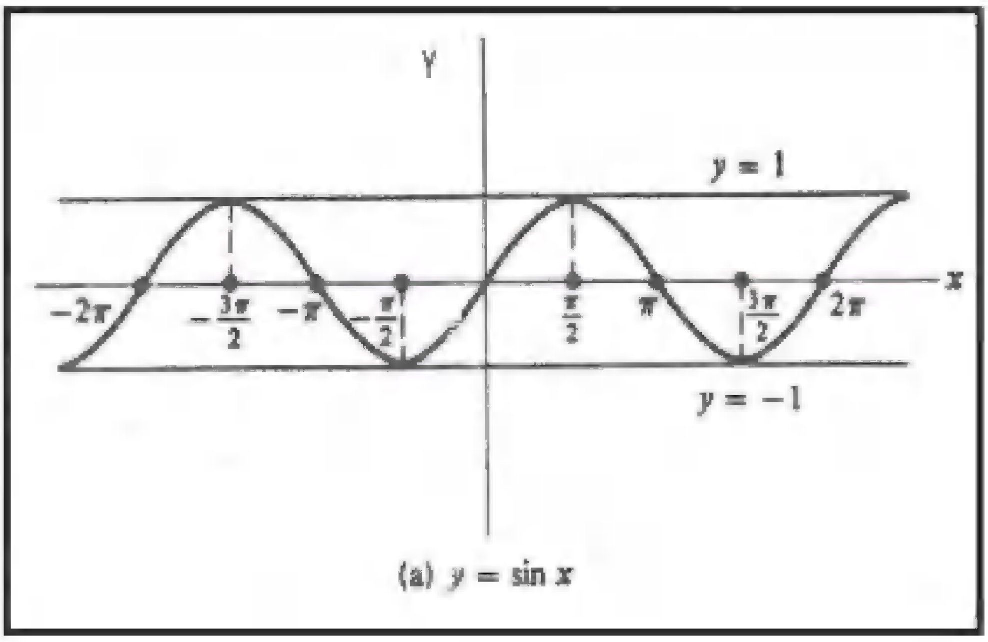
والجدول رقم (١-٣) يعطي قياس الزوايا الشعاعية وقيم كل من الجيب والجيب تمام والظل لعدد من الزوايا التي تظهر كثيراً خلال البحث والدراسة.

جدول رقم (١-٣)

الدرجات (degrees)	0	30	45	60	90	180	270	360
الزوايا الشعائية (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Sinالجيب	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
الجيب تمام (cos)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
الظل (tan)	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير محدد	0	غير محدد	0

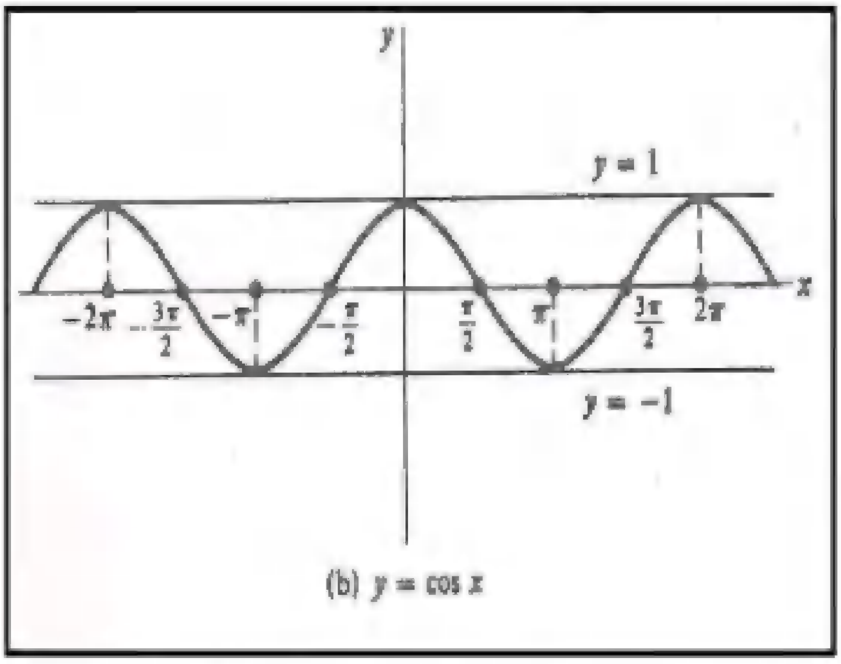
٣_٣ منحنيات الجيب ولجيب تمام والظل (tan, cos, sin)

١- **منحنى الجيب sin:** تعتمد قيم sin θ على قياس الزاوية θ كما يظهر ذلك في الجدول (3-1) أعلاه فإذا كان y = sin x فإن منحني الجيب يكون كما مبين في الشكل (3 - 3):



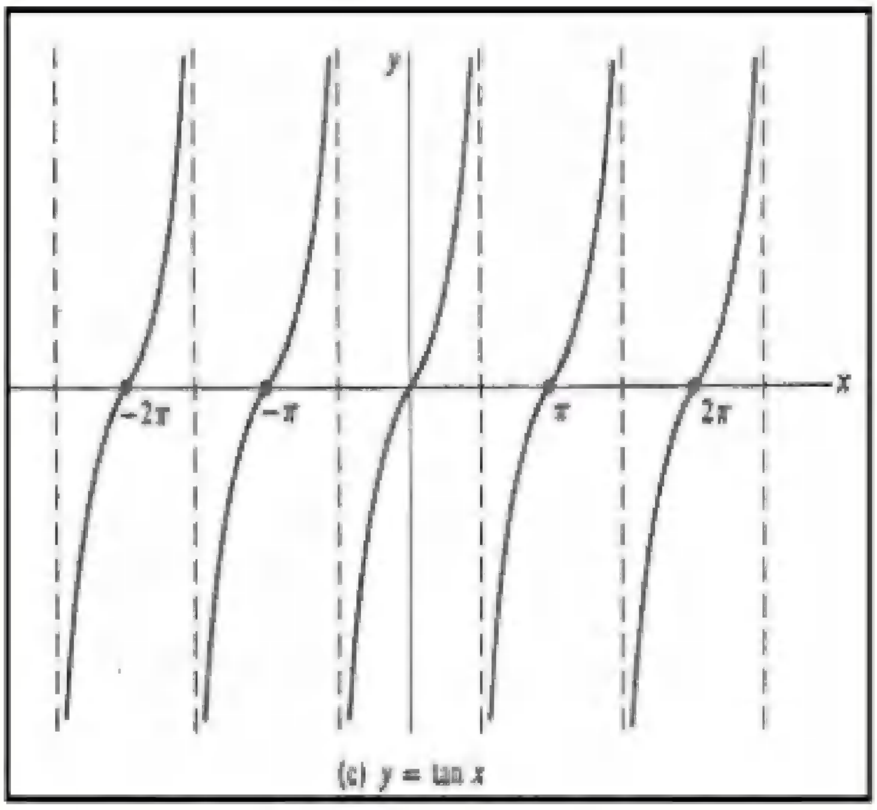
منحني الجيب شكل رقم (٣-٣)

٢- **منحنى الجيب تمام cos:** أما منحني cos فانه يمثل بالدالة y = cos x وتعتمد قيم cos x على الزاوية θ المبينة الجدول (3-1) وعند رسم الدالة المذكورة وفق القيم الواردة في الجدول تظهر كما مبين في الشكل رقم (3-4) الآتي:



منحنى الجيب تمام- شكل رقم (٣-٤)

٣- <u>منحنى ظل الزاوية tan:</u> وبنفس الطريقة نستطيع رسم الدالة y = tan x التي تمثل منحني الظل حيث تعتمد قيم tan x على قياس الزاوية θ كما في الشكل (5-3).



منحنى الظل شكل رقم (٣-٥)

٣-٤ إشارات الدالة المثلثية

إن أية دالة مثلثية ذات زاوية ($N\frac{\pi}{2}\pm\theta$) تساوي (±) نفس دالة الزاوية (⊠) إذا كانت N زوجية وتساوي (±) الدالة المشتركة للزاوية θ إذا كانت N فردية.

أما الإشارة فهي كما في الدالة الأصلية للزاوية ($N\frac{\pi}{2}\pm\theta$).

والجدول رقم (٣-٢) يبين إشارات الدالة المثلثية في الأرباع الأربعة للإحداثيات:

جدول رقم (٣-٢)

الدالة	الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
جا ، قتا (sin,csc)	+	+	-	-
جتا ، قا (cos , sec)	+	-	-	+
ظا ، ظتا (tan , cot)	+	-	+	-

وعلى سبيل المثال فإن $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ و $\cos(-\theta) = +\cos\theta$ و $\tan(-\theta) = -\tan\theta$.

ويمكن استخراج قيم الدوال المثلثية للزاوية $0^o \le \theta \le 90^o$ من جداول معدة لهذا الغرض.

أمثلة

جد قيم الدوال المثلثية الآتية:

١) $\cos 150°$

٢) $\tan 210°$

٣) $\sec 315°$

<u>الجواب:</u>

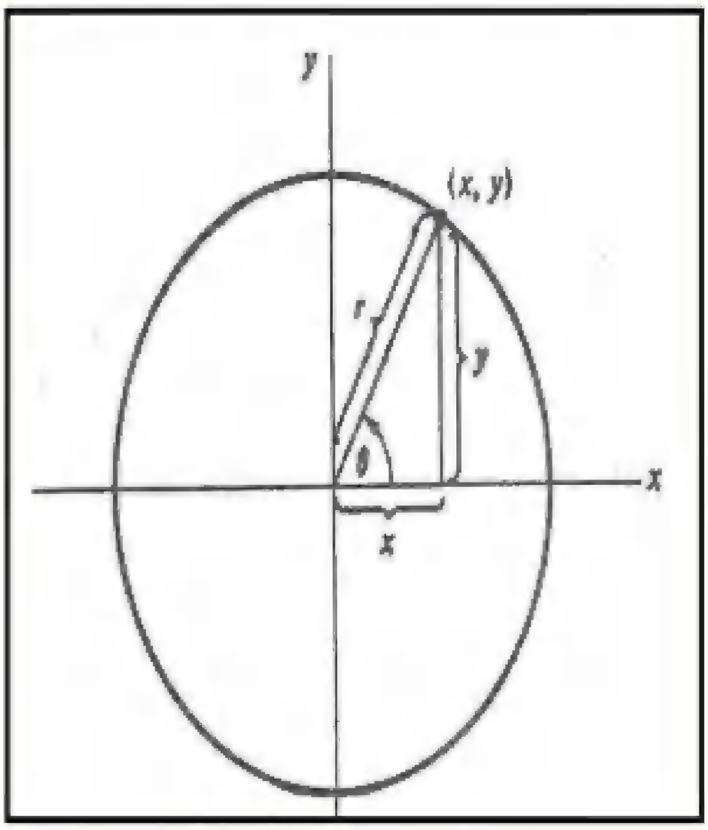
١) $$\cos 150^o = \cos(1\times\frac{\pi}{2}+60^o) = \pm\sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

٢) $$\tan 210^o = \tan\left(2\times\frac{\pi}{2}+30^o\right) = \pm\cot 30^o = \pm\frac{1}{\tan 30^o} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

٣) $$\sec 315^o = \sec(3\times\frac{\pi}{2}+45^o = \pm\cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

٣-٥ النظام الإحداثي القطبي (Polar coordinate)

كثيراً ما تكون هناك حاجة لتحديد موقع نقاط بموجب النظام ألإحداثي القطبي إضافة إلى النظام ألإحداثي المتعامد وعلى وجه التخصيص في حساب التفاضل والتكامل حيث يجري عرض الدوال المثلثية دائماً بموجب نظام الإحداثيات القطبية. فالنقطة (x,y) في الإحداثيات المتعامدة تقابلها النقطة ($r\cos\theta$, $r\sin\theta$) في الإحداثيات القطبية كما في الشكل (3-6). حيث أن كل من r, θ تتحدد كما يأتي:



شكل رقم (٦-٣)

إذا كانت (x,y) نقطة على مستوي حقيقي فأن (x,y) تقع على الدائرة المتمركزة في النقطة الأصل ولها نصف قطر هو $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ وهذا يعني: أن النقطة (x,y) تفي بمتطلبات معادلة الدائرة $x^2+y^2 = r^2$

وبذلك يمكن تحديد النقطة (x,y) تماماً عن طريق تعيين نصف القطر (r) للدائرة المتمركزة في النقطة (٠،٠) حيث تقع النقطة (x,y) على محيطها. وكذلك تحديد الزاوية θ المتكونة عن طريق التحرك عكس عقرب الساعة انطلاقاً من ألإحداثي x الموجب على طول محيط الدائرة باتجاه النقطة (x,y). أما الأعداد (r, θ) فيطلق عليها الإحداثيات القطبية للنقطة (x,y). وتنسب الإحداثيات القطبية والإحداثيات المتعامدة بعضها للبعض بالعلاقات الآتية مع ملاحظة الشكل رقم (6-3) أعلاه.

١) $x = r\cos\theta$ حيث أن $\cos\theta = \frac{x}{r}$

٢) $y = r\sin\theta$ حيث أن $\sin\theta = \frac{y}{r}$

٣) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ نظرية فيثاغورس

٤) $y = x\tan\theta$ حيث أن $\tan\theta = \frac{y}{x}$ **(3 - 6)**

٥) $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

٦) $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

وعندما يراد الانتقال من نظام أحداثي إلى أخر يمكن استخدام العلاقات الستة أعلاه لهذا الغرض ولتوضيح ذلك دعنا نأخذ بعض الأمثلة:

أمثلة

مثال (١)

جد الإحداثيات القطبية المقابلة لإحداثيات المتعامدة المحددة بالنقاط الآتية:

١) $()0,\sqrt{3}$

٢) $(\sqrt{3},1)$

الجواب:

(أ) لدينا = $(x,y)(0,\sqrt{3})$

إذن $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0+3} = \sqrt{3}$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{0}{\sqrt{3}} = 0$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$$

ومن الجدول (3-1) نجد أن عدد الزوايا الشعاعية المقابلة للزوايا التي جيب تمامها (cos = 0)

وجيبها (sin = 1) هي $\frac{\pi}{2}$ من الزوايا الشعاعية وإن $\theta = 90^o$ أي أن $\theta = \frac{\pi}{2}$ زاوية شعاعية.

إذن الإحداثيان القطبيان: $(r,\theta) = (\sqrt{3},\frac{\pi}{2})$

(ب) أذن لدينا:

$$x,y = (\sqrt{3},1)$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}$$

ومن الجدول (3-1) نجد إن الزاوية التي جيبها ($\sin = \frac{1}{2}$) وجيب تمامها $\cos = \frac{\sqrt{3}}{2}$ هي

$\theta = 30^\circ$ وان عدد الزوايا الشعاعية المقابلة للزاوية المذكورة تساوي $\frac{\pi}{6}$ أي أن $\theta = \frac{\pi}{6}$ زاوية شعاعية

وعليه:

يكون الإحداثيان القطبيان $(r,\theta) = (2,\frac{\pi}{6})$

مثال (٢):

جد الإحداثيين المتعامدين المقابلين للإحداثيين القطبيين الممثلين بالنقاط الآتية:

(١) $(2,\frac{\pi}{3})$

(٢) $(6,\pi)$

الجواب:

(أ) لدينا $(\theta r,)=(2,\frac{\pi}{3})$

إذن r = 2 و $\theta = \frac{\pi}{3}$ زاوية شعاعية = ٦٠° (من الجداول 3-1)

$$x = r\cos\theta = (2)(\frac{1}{2}) = 1$$

$$y = r\sin\theta = (2)(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3}$$

$$\therefore (x, y) = (1, \sqrt{3})$$

(ب) لدينا: $(r,\theta) = (6,\pi)$

وهذا يعني أن $r = 6$ أما $\theta = \pi$ زاوية شعاعية =180° (من الجدول 3-1)

$$x = r \text{ cas } \theta = (6)(-1) = -6$$

$$y = r \sin\theta = (6)(0) = 0$$

$$\therefore (x, y) = (-6, 0)$$

مثال (٣):

جد الإحداثيات المتعامدة المقابلة للإحداثيات القطبية الممثلة بالنقاط الآتية:

١) $(5,\frac{\pi}{3})$

2) $(4,\pi)$

الجواب:

أ) لدينا: $(r,\theta) = (s,\frac{\pi}{3})$

أي أن: $r = 5, \theta = \frac{\pi}{3}$

$$\therefore x = r\cos\theta$$

$$= (5)(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$$

و $y = r\sin\theta$

$$= 5(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

إذن النقطة: $(x,y) = (\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2})$

ب) لدينا: $(r,\theta 0 = (4,\pi)$

أي أن: $\theta = \pi, r = 4$

$$\therefore x = r\cos\ \theta = (4)(-1) = -4$$

$$\theta = (4)(-1) = -4\ \ y = r\sin$$

$$\therefore (x,y) = (-4,0)$$

وليس هناك صيغة واحدة لعرض الإحداثيين القطبين لنقطة معينة بل هناك صيغ أخرى مثل:

$(4,-\frac{13\pi}{3})$ و $(-4,\frac{6\pi}{3})$ و $(4,\frac{\pi}{3})$ وكلها تشير إلى نفس النقطة وبسبب عدم التحديد في تمثيل

النقطة في الإحداثيات القطبية فأن المعادلة القطبية يمكن أن تكتب بصيغ مختلفة.

الجزء الثاني

وبشكل عام إذا كانت: $\int(r,\theta)=0$ هي معادلة المنحنى في الإحداثيات القطبية فأن تمثيله يتم وفق مجموعة من المعادلات كل معادلة تأخذ عدة صيغ حسب القيم التي تأخذها (n):

أ)

$$\int\left[(-1)^n r,\theta+n\pi\right]=0$$

حيث أن: $n=0,\pm1,\pm2......$

<u>مثال (١):</u>

خذ المعادلة: $r=\sin\frac{\theta}{2}$ حيث فيها ثلاث صيغ بديلة والتي يمكن أن نؤخذ من الصيغة:

$$(-1)^n r=\sin(\frac{\theta}{2}+n\frac{\pi}{2})$$

وذلك عندما نأخذ (n) القيم (1,2,3) وكما مبين في أدناه:

أ) إذا كانت: n=1

فإن:

$$(-1)r=\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-\cos\frac{\theta}{2}$$

حيث أن: $\cos\frac{\pi}{2}=0$ من الجدول (3-1)

أو: $r=-\cos\frac{\theta}{2}$

ب) إذا كانت: n=2

فإن:

$$(-1)^n r = \sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)$$

$$= -\sin\frac{\theta}{2}$$

حيث أن: $\sin\pi = 0$ من الجدول (3-1)

أو: $r = -\sin\frac{\theta}{2}$

ج) إذا كانت: n=3

$$(-1)^n r = \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= -\cos\frac{\theta}{2}$$

حيث أن: $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$ من الجدول (3-1)

أو: $r = \cos\frac{\theta}{2}$

ويمكن استخدام العلاقات بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات المتعامدة بتغيير صيغة المعادلة من نظام إحداثي إلى آخر. فبعد عرض المعادلة بصيغة الإحداثيات القطبية يمكن استخراج الصيغة البديلة باستخدام القواعد أعلاه:

مثال:

جد المعادلة وفق نظام الإحداثيات المتعامدة للمنحنى الذي معادلته بصيغة الإحداثيات القطبية كالآتي:

$$r = \frac{3}{2 + \sin\theta}$$

<u>الجواب:</u>

لدينا:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3}{2 + \sin\theta}$$

وحيث أن: $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$$\therefore \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3}{2 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$$

$$= \frac{3}{\frac{(\sqrt{x^2 + y^2})^2 + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3\sqrt{x^2 + y^2}}{2(\sqrt{x^2 + y^2})^2 + y}$$

وبالقسمة على $\sqrt{x^2 + y^2}$ ينتج:

$$1 = \frac{3}{2(\sqrt{x^2 + y^2}) + y}$$

$$3 = 2(\sqrt{x^2 + y^2}) + y$$

$$3 - y = 2(\sqrt{x^2 + y^2})$$

وبتربيع الطرفين ينتج:

$$(3-y)^2 = 4(x^2+y^2)$$

$$9-6y+y^2 = 4x^2+4y^2$$

$$3y^2+4x^2+6y-9=0$$

وهي معادلة غير خطية يمكن تمثيلها بالإحداثيات المتعامدة.

٦ـ٣ التطبيقات الاقتصادية للمنحنيات المثلثية

تستخدم المنحنيات المثلثية في بعض مجالات التحليل الاقتصادي وخاصة تلك المتعلقة بالدورة الاقتصادية وتحديد مسار النمو الاقتصادي في حالات

التذبذب والاستقرار (راجع الفقرة ١٠-٦). كما تستخدم في عرض التذبذبات في السلاسل الزمنية التي نتحدث عن أحدى الظواهر الاقتصادية ذات العلاقة.

فمعادلة الاستقرار في دورة اقتصادية يمكن أن تعطي بالصيغة الآتية:

$$A = \ln(\alpha - \gamma) + \ln\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right) < 0$$

كما تتضمن بعض الدوال الاقتصادية مكونات مثلثية وذلك لغرض أعطائها تعبيرا أكثر دقة عن طبيعة الظاهرة المبحوثة. وبالرغم من بعض الصعوبات التي تواجه صياغة الدوال المثلثية الاقتصادية وربما أيجاد الحلول اللازمة لها ألا أن الحاسوب قد حل هذه المشكلة وبذلك فقد توسع استخدام هذا النوع من الدوال خلال السنين الأخيرة.

تمارين (١-٣)

١- حدد الزوايا الشعاعية لكل من الزوايا المبينة في الدرجات الآتية:

١) $\theta = -120$

٢) $\theta = 215°$

٣) $\theta = 80°$

٢- جد قيم الدوال المثلثية الآتية:

١) $\sin 140^\circ$

٢) $\cos 90^\circ$

٣) $\tan 330^\circ$

٣- جد الإحداثيات القطبية للنقاط الآتية المعطاة في الإحداثيات المتعامدة:

a) $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

b) $(1,1)$

c) $(-1,0)$

٤- جد الإحداثيات المتعامدة للنقاط الآتية المعطاة وفق صيغة الإحداثيات القطبية:

a) $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$

b) $\left(-7, \frac{\pi}{3}\right)$

c) $(1, 2\pi)$

٥- جد معادلة الإحداثيات المتعامدة المقابلة لكل من المعادلات المعطاة بالإحداثيات القطبية الآتية:

a) $r = \frac{2}{\cos\theta}$

b) $r = 2\sin\theta$

c) $r = 3\csc\theta$

٦- جد معادلة الإحداثيات القطبية المقابلة لكل من المعادلات المعطاة بالإحداثيات المتعامدة الآتية:

$x^2 + y^2 = 2x$

$y = x^2$

$y^2 = 4x$

٧- برهن على صحة هذه العلاقات:

a) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

b) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

c) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta - 2\cos^2\theta - 1$

الفصل الرابع

حساب التفاضل

Differentiation calculus

حساب التفاضل

Differentiation calculus

٤-١ مقدمة

يعني حساب التفاضل والتكامل (calculus) في تحليل الحركة والتغير، وحيث أن كل شيء في هذا العالم يتحرك فإن حساب التفاضل والتكامل يدخل في جميع حقول العلم والمعرفة.

ولا نبالغ إذا ما قلنا بأن أهمية حساب التفاضل والتكامل تبدو واضحة في معظم التحليلات الرياضية وبالأخص حساب التفاضل منه.

لقد تطور حساب التفاضل والتكامل في القرن السابع عشر على يد كل من إسحاق نيوتن[1] (Isaac Newton) وكوتفريت ليبنتز (Gottfried leibnitz) اللذان عملا كل عن انفراد. حيث كانت حاجة نيوتن لحساب التفاضل والتكامل أساسا في محاولاته لحل مسائل معينة لها علاقة بعمله في حقل الفيزياء والفلك ليجد سرعة حركة الأجسام. أما بالنسبة لليبنتز فقد كانت حاجته في حل مسائل في الهندسة وهي أيجاد ظل الزاوية للمنحني و طول قطعة معينة من المنحني والمساحة المحددة بمنحني أو أكثر وحجم الجسم وغيرها.

إن العمليات الأساسية في الحساب أعلاه ككل هي عمليات التفاضل والتكامل وهما حسابان أحدهما عكس الأخر. فالتفاضل يختص في تحديد معدل التغير في دالة معينة. أما التكامل فيعني بالعكس تماماً أي في أيجاد الدالة التي معدل تغيرها معلوم.

لقد استخدم حساب التفاضل والتكامل من قبل الفيزيائيين والفلكيين والكيماويين والمهندسين منذ أن أصبحت مفاهيمه واضحة ومن ثم اتسع استخدامه في الوقت الحاضر

(1) إسحاق نيوتن (١٦٤٢-١٧٢٧) عالم رياضي وفيزيائي اسكتلندي يعزى آلية اكتشافات عدة منها قوانين الجاذبية وتكوين الضياء الشمسي وأسس حساب التفاضل. أما ليبنتز (١٦٤٦-١٧١٦) فهو رياضي وفيلسوف ألماني مكتشف أسس (التحليل الحسابي) الذي تضمن أسس حساب التفاضل أيضا.

ليشمل علوم الحياة والعلوم الاجتماعية و الإنسانية والسلوكية، ولما كانت العمليات الاقتصادية كثيراً ما تقوم على تحليل الحركة والتغير لذلك فقد دخل حساب التفاضل والتكامل في التحليلات الاقتصادية على نطاق واسع وخاصة في التحليلات الحديثة كإيجاد النهايات العظمى والصغرى للمتغيرات الاقتصادية كأقصى الأرباح واقل التكاليف وكذلك الحال بالنسبة لبعض النماذج التي تعني في حساب تعظيم أو تصغير دالة معينة وفق ضوابط (قيود) معينة والتي تقع عملياتها ضمن حساب التفاضل.

إن ابسط عرض للعلاقات الدالية المتكونة من متغيرين ما يمكن تمثليها عن طريق خط مستقيم وذلك طبقاً لمعدل تغير ثابت أو متماثل في حركة المتغير المعتمد و المتأتية انعكاساً للتغير الذي يحدث في المتغير المستقل. أما معدل السرعة المتغيرة في المتغير المعتمد طبقاً للحركة في المتغير المستقل فإن ها تظهر عن طريق المنحنيات أو الدوال غير الخطية. وحيث أن العلاقات الدالية تأخذ أنواعا مختلفة إذن لابد من التطرق أليها قبل الدخول في شرح مفصل لمفهوم التفاضل.

٤-٢ أنواع الدوال

تطرقنا في الفصل الأول من الجزء الأول من الكتاب إلى مفهوم الدالة وقلنا إنها صيغة العلاقة بين متغيرين أو أكثر حيث هناك متغير معتمد تتزايد أو تتناقص قيمته تبعاً للتغيرات التي تطرأ على المتغير (أو المتغيرات) المستقلة وبصيغة عامة فإن شكل الدالة يظهر كالآتي :

$$y = f(x)$$

$$g = f(x, l, k)$$

حيث تقرأ الدالة الأولى بان (y) دالة (x) والدالة الثانية بأن (g) هي دالة لكل من (x, l, k)

فإذا كانت لدينا دالة بالصيغة التالية :

$$y = 5x + 4$$

فإن $y = f(x)$

أو $f(x) = 5x + 4$

ولنفترض أن x = 7 لذلك فإن $f(7) = 5(7) + 4 = 39$

وإذا كانت x = 3 فإن $f(3) = 5(3) + 4 = 19$

وتعتبر الصيغة أعلاه الصيغة العامة للدالة . ولكن الدوال على أنواع مختلفة هي :

أ- الدالة الصريحة والدالة الضمنية

١- الدالة الصريحة Explicit Function

هي الدالة التي تقع فيها (y) في طرف كمتغير معتمد و (x) في طرف آخر كمتغير مستقل.

مثال :

$$y = 2 + 4x - 2x^3$$

$$y = 3 - 0.4x$$

وتكتب عادة بصيغتها الدالية العامة :

$$y = f(x) \qquad (4 - 1)$$

٢- الدالة الضمنية Implicit Function

وهي الدالة التي لا تقع فيه (y) في طرف و (x) في طرف أخر بل متداخلتين في أحد الأطراف.أي حسب الصيغة الآتية :

$$f(x, y) = 0 \qquad (4\text{-}2)$$

ويعود السبب في ذلك لصعوبة تحديد العلاقة السببية بين كل من x,y مما يدعو لكتابة الدالة بصيغة محايدة لا تظهر فيها التبعية والاستقلالية.

مثـال:

$$y-4x+2x^3-2=0$$

$$xy+2x-5+1=0$$

ويمكن تحويل الدالة الضمنية إلى دالة صريحة وذلك بنقل yفي أحد الطرفين و x في الطرف الأخر.

مثال خذ :

$$xy-2x+5y-1=0$$

$$xy+5y=2x+1$$

$$y(x+5)=2x+1$$

أي أن : $y=f(x)$

$$\therefore y=\frac{2x+1}{x+5}$$

أو : $xy-2x=1-5y$

$$x(y-2)=1-5y$$

$$x=\frac{1-5y}{y-2}$$

أي أن : $x=f(y)$

ب- الدالة العكسية Inverse Function

إذا كانت لدينا الدالة التالية :

$$y=f(x) \qquad (4\text{-}3)$$

فإن بالإمكان أن نجعل x دالة y أي :

$$x=f(x)$$

مثال :

$$y = 3 - 5x$$

وإذا أردنا أن نعكس هذه الدالة فسنحصل على :

$$5x = 3 - y$$

$$x \frac{3 - y}{5}$$

أي أن : $x = f(y)$ أو: $x = 0.6 - 0.2y$

ج- الدالة الوحيدة القيمة والدالة المتعددة القيم :

إن الدالة التي يكون فيها للمتغير y أكثر من قيمة مقابل أي قيمة تعطى للمتغير المستقل x تسمى دالة متعددة القيم.

مثال :

$$y^2 = 16x^2$$

$$y = \sqrt{16x^2} = \pm 4x$$

فهنا $y = 4x$ أو $y = -4x$

أما إذا قابل كل قيمة من قيم المتغير المستقل x قيمة واحدة للمتغير المعتمد y قيل لهذه الدالة بأنها دالة وحيدة القيمة.

مثال:

$$y = x - 4x^2$$

د- الدالة المتزايدة والدالة المتناقصة :

١- الدالة المتزايدة Increasing Function

يقال للدالة بأنها متزايدة إذا كانت قيم المتغير المعتمد (y) تتزايد بتزايد قيم المتغير المستقل (x) .

مثال:

$$y = 5 + 2x^3 \qquad (4\text{-}4)$$

٢- الدالة المتناقصة Decreasing function

أما الدالة التي تتناقص فيها قيم المتغير المعتمد y كلما تزايدت قيم المتغير المستقل xفإن ها تسمى دالة متناقصة.

مثال ذلك :

$$y = 3 - 4x^2$$

$$y = \frac{1}{2 + x^2} \qquad (4\text{-}5)$$

هـ- الدالة المتعددة المتغيرات Multi - Variables Function

إذا كان المتغير المعتمد ليس دالة لمتغير مستقل واحد بل لمجموعة من المتغيرات المستقلة قيل لتلك الدالة بأنها دالة متعددة المتغيرات. وبكلام رياضي تكتب بالشكل التالي:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (4\text{-}6)$$

حيث أن :

y = المتغير المعتمد .

و $x_1, x_2, ..., x_n$ هي متغيرات مستقلة.

<u>مثال (١)</u>

$$y = 2x_1 + 4x_2^2 + x_3$$

أي أن : $y = f(x_1, x_2, x_3)$

<u>مثال (٢)</u>

$$y = 4 + x + 3g + 5k + m$$

أي أن : $y = f(x, g, k, m)$

وبعد أن تعرفنا على أنواع الدوال نجد أنفسنا بحاجة إلى شرح مفهوم النهاية لكونه الركيزة الأساسية في تعريف التفاضل وحساب المشتقة إضافة إلى الحاجة أليه في توضح مفهوم الاستمرارية.

٤-٣ النهايات Limits

٤-٣-١ تعريف

يستند مفهوم النهاية على فكرة الاقتراب من نقطة معينة أو قيمة معينة شيئاً فشيئاً دون بلوغها.

خذ الدالة الآتية:

$$y = f(x) = \frac{1}{x} + 1$$

فعندما تكون قيمة x = 1 فإن y = 2 وعندما تكون x = 2 فإن : $y = 1\frac{1}{2}$ وعندما تكون x = 100فإن : $y = \frac{101}{100}$

وعندما تصبح قيمة x = 100000 فإن $y = \frac{100001}{100000}$ وإذا ما اقتربت قيمة x من ∞ فإن قيمة (y) تقترب من (1) والحالة الأخيرة تكتب كالآتي:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1 \qquad (4 - 7)$$

أو : $f(x) \to 1$ عندما $x \to \infty$

وفي المثال أعلاه يتبين أن الانتقال بقيمة x من (1) إلى (∞) لا يمكننا من معرفة العدد الذي يلي (1) والذي ينقلنا عبر ما لا نهاية من الأعداد الحقيقية التي تقع في الفترة بين $(1, \infty)$.

لقد شغلت هذه المسالة الرياضيين منذ القدم ولكن رياضيو القرن الثامن عشر أجابوا عنها وذلك عندما اخذوا للمسالة صورة ساكنة ومن ثم شرحوا هذه الصورة بلغة الكميات المحددة .فكيف تم لهم هذا ؟ لنطلع على ما قالوه بهذا الشأن :

إذا كانت لدينا الدالة الآتية $y = f(x)$ وكانت لدينا الكميتان الثابتتين الآتيتين: x , b بحيث:

إذا كان الفرق المطلق بين y, b أي $|f(x) - b|$ يصغر تدريجياً حتى يقترب من الصفر (أو أصغر من كمية ثابتة صغيرة جداً معلومة) وذلك كلما اقترب x من x_1 أي كلما اقترب الفرق المطلق بين $x\ x_1$ ، أي $|x - x_1|$ من الصفر (أو اصغر من كمية ثابتة أخرى صغيرة جداً) فحينذاك يقال أن الكمية الثابتة (b) هي النهاية التي تؤول أليها الدالة $y = f(x)$ عندما تؤول x إلى x_1 وتكتب بالرموز كالآتي :

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = b \qquad (4 - 8)$$

لنأخذ المثال الآتي :

$$f(x) = 2x + 3$$

ماذا تكون عليه قيم الدالة عندما تقترب قيم x من العدد x_1 ولنفرض أن $x_1 = 3$. أي ماذا يحدث لقيم الدالة $f(x)$ عند إعطاء x قيما قريبة من العدد 3 أي (x_1) أو أكثر بقليل من العدد 3 .

أن الذي يحدث يمكن تصويره بالجدول الآتي :

X : 2.4	2.8	2.9	2.9999	3	3.0001	3.001	3.01	3.1
f(x): 7.8	8.6	8.8	8.9998	9	9.0002	9.002	9.02	9.2

حيث يلاحظ أن قيمة الدالة تقترب من العدد 9 كلما اقترب x من العدد 3

أي أن:

$\lim f(x) = 2x+3$ عندما تقترب x من 3 تساوي 9وبالرموز.

$$\lim_{x\to 3}(2x+3) = 9$$

وعندما يقترب الفرق المطلق بين $|x - x_1|$ من الصفر وفي مثالنا الذي ظهر في الجدول أعلاه كان الفرق $0.0001 = |3 - 2.9999|$ أو $0.0001 = |3 - 3.0001|$ ، ويمكن أن نعطي قيماً أخرى لـ(x1) بحيث يكون الفرق المطلق بين x_1 , x متناهي في الصغر أي قريباً من الصفر وفي هذه الحالة يصبح الفرق المطلق بين f (x), b صغيراً جداً كما يظهر في المثال أعلاه كالآتي :

$$|f(x) - b| = |9 - 8.9998| = 0.0002 \quad \text{أو} \quad |9 - 9.0002| = 0.0002$$

ويقترب هذا الفرق المطلق من الصفر كلما اقترب الفرق المطلق $|x - x_1|$ من الصفر .وقد يتسائل أحدهم عن جدوى هذا الحسابات المطلوبة لقيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة ثابتة معينة، ففي مثالنا نستطيع ببساطة أن نجد قيمة الدالة بافتراض x = 3 وذلك كالآتي :

$$f(x) = 2(3) + 3 = 9$$

إن السبب في ذلك يعود إلى أن الدالة تكون في بعض الأحيان غير معرفة عند قيمة معينة للمتغير المستقل x . والمثال الآتي يعطي صورة عن هذه الحالة :

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3}, (x \neq 3)$$

إن هذه الدالة غير معرفة عند x=3 وذلك لأن:

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} = \frac{3^2 - 7(3) + 12}{(3) - 3} = \frac{21 - 21}{3 - 3} = 0$$

ولكن لنراقب اتجاه هذه الدالة عندما تأخذ x قيماً قريبة من العدد (٣) وكما مبين في الجدول الآتي :

3.1 x : 2.9 2.99 2.999 .... 3.... 3.001 3.01

f(x) : -1.1 -1.01 -1.001 ....-1.... -0.999 -0.99 -0.9

حيث يلاحظ أن قيمة f(x) تقرب من (-1) كلما اقتربت قيمة x من 3 من جهة اليمين أو من جهة اليسار أي أن :-

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} = -1$$

ولمزيد من الإيضاح نذهب إلى تفاصيل أكثر :

لما كان $x \neq 3$ فإن الدالة يمكن أن تكتب:

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3}$$

$$f(x) = \frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)}, (x \neq 3)$$

وبالاختصار نحصل على :

$$f(x) = x - 4, (x \neq 3)$$

وعندما $x \to 3$ فإن $\lim f(x) \to -1$

وكما هو واضح في الجدول أعلاه.

ومما سبق يتبين ما يأتي :-

لكي تكون للدالة نهاية في نقطة مثل (a) لابد من توفر الشرطين :

أ- لابد أن تكون الدالة معرفة في فاصلة مسافة ولو صغيرة إلى يمين أو يسار (a) أي يجب أن تكون معرفة بالنقاط المجاورة ل (a) ولا يشترط أن تكون الدالة معرفة عند النقطة (a).

ب- هناك إمكانية لجعل الفرق بين الدالة ونهايتها صغيراً جداً حسبما نرغب وذلك بانتقاء قيم للمتغير (x) قريبة جداً من النقطة (a) دون أن تساويها.

لقد طور الرياضيون قواعد خاصة يمكن الرجوع إليها عند الحاجة لإيجاد النهاية وقد وفرت هذه القواعد جهداً كبيراً في إجراء الحسابات المطولة التي تستغرقها النهايات . ونستعرض في الفقرة أدناه هذه القواعد دون الدخول في براهينها.

٢-٣-٤ قواعد النهايات

إذا كان k هو عدد ثابت وكان لدينا $\lim_{X \to b} f(x) = b$ و $\lim_{X \to a} g(x) = c$ فأن:

١- $\lim_{X \to a} k = k$ أي أن نهاية المقدار الثابت هي الثابت نفسه .

$$\lim_{X \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{X \to a} f(x) \pm \lim_{X \to a} g(x) = b \pm c$$

أي أن نهاية مجموع أو الفرق بين دالتين يساوي مجموع أو الفرق بين نهايتيهما. وينطبق ذلك على أكثر من دالتين أيضاً.

٢- $\lim_{X \to a}[f(x).g(x)] = [\lim_{X \to a} f(x)][\lim_{X \to a} g(x)] = bc$.

وهذا يعني أن نهاية حاصل ضرب دالتين يساوي حاصل ضرب نهايتيهما.

٣- $\lim_{X \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{X \to a} f(x)}{\lim_{X \to a} g(x)} = \frac{b}{c} ,(c \neq 0)$

ويقصد بهذا أن نهاية حاصل قسمة دالتين يساوي حاصل قسمة نهايتها بشرط إلا يكون المقسوم عليه يساوي صفراً.

٤- $\lim_{X \to a}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim_{X \to a} f(x)\right]^n = b^n$

أي أن نهاية الدالة مرفوعة لقوة مثل n تساوي نهاية الدالة مرفوعة للقوة n نفسها.

٥- $\lim_{X \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{b}$

وهذا يعني أن نهاية الجذر النوني للدالة يساوي الجذر النوني لنهايتها.

ولتوضيح القواعد أعلاه نستعرض بعض الأمثلة :

مثال (١) :

جد : $\lim_{X \to 4}(x^2 + 3x - 5)$

الجواب :

$$\lim_{X \to 4}(x^2 + 3x - 5) = \lim_{X \to 4} x^2 + \lim_{X \to 4} 3x - \lim_{X \to 4} 5$$

$$(4)^2 + 3(4) - 5 = 23$$

مثال (٢) :

جد: $\lim_{X \to 2}(x^2 + 2)(x^3 - 5)$

الجواب :

باستخدام القاعدة رقم (٣) نحصل على :

$$\lim_{X \to 2}\left[(x^2 + 2)\right]\left[(x^3 - 5)\right]$$

$$\lim_{X \to 2}(x^2 + 2).\lim_{x \to 2}(x^3 - 5)$$

ومن ثم نستخدم القاعدتين (١،٢) فينتج :

الجزء الثاني

$$(\lim_{X\to 2} x^2 + \lim_{X\to 2} 2)(\lim_{X\to 2} x^3 - \lim_{X\to 2} 5)$$

$$(4+2)(8-5)=18$$

مثـال (٣):

جد : $\lim_{X\to 1}\frac{x^2-6}{x}$

الجـواب:

باستخدام القاعدة رقم (٤) ينتج :

$$\lim_{X\to 1}\frac{x^2-6}{x}=\frac{\lim_{X\to 1}(x^2-6)}{\lim_{X\to 1} x}=\frac{\lim_{x\to 1} x^2-\lim_{x\to 1} 6}{\lim_{x\to 1} x}=\frac{1-6}{1}=-5$$

مثـال (٤):

جد: $\lim_{X\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}$

الجـواب :

باستخدام القاعدة رقم (٤) نحصل على:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\frac{\lim_{X\to 2} x^2-\lim_{X\to 2} x-\lim_{X\to 2} 2}{\lim_{X\to 2} x-\lim_{X\to 2} 2}$$

من ثم تطبق القاعدة رقم (١،٢) فينتج:

$$=\frac{4-2-2}{2-2}=0$$

وبذلك نحصل على نتيجة غير محددة أي أن الدالة تكون غير معرفة عندما $x = 2$. فكيف يمكن مواجهة هذه القضية :

في حالة من هذا النوع يتم تكييف الكسر بطريقة بحيث نحصل على صيغة أخرى وذلك بقسمة كل من البسط والمقام على المقدار الذي قيمته صفر في نهاية الدالة (وفي المثال أعلاه هو المقام). وبذلك يمكن أن نحصل على نهاية للدالة . إذن دعنا نأخذ بهذه الملاحظة ونرى :

$$\lim_{X\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{X\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)}$$

وباختصار (x - 2) من البسط والمقام نحصل على :

$$\lim_{X\to 2} x+1=\lim_{X\to 2} x+\lim_{X\to 2} 1$$

$$=2+1=3$$

مثـال (٥) :

جد: $\lim_{X\to\infty}\frac{3x^2+x+4}{2x^2+x-3}$

الجواب:

واضح أن النتيجة ستكون $\frac{\infty}{\infty}$ وبذلك فإن $\lim_{X\to\infty} f(x)$ تكون غير معرفة ولتلافي نتيجة من هذا النوع عند تطبيق القاعدة رقم (٤) نقوم بما يأتي: للحصول على نهاية معرفة نكيف الكسر بقسمة كل من بسطه ومقامه على أعلى قوة لمتغير xالذي يظهر في المقام وكما يأتي:

$$\lim_{X\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}=\frac{3}{2}$$

وهذا واضح لان كل من : $\frac{1}{x},\frac{4}{x^2},\frac{3}{x^2}\to 0$ وعندما $x\to\infty$

ملاحظة :

عندما نواجه حالات القسمة على ∞ أو الصفر فإن النتائج التالية تكون مفيدة .

$$\frac{\infty}{\infty}=1 \ ، \ \frac{\text{كمية}}{\infty}=0 \ ، \ \frac{\infty}{\text{كمية}}=\infty \ ، \ \frac{\text{كمية}}{0}=\infty \ ، \ \frac{0}{\text{كمية}}=0$$

مثال (٦) :

جد: $\lim_{X\to 5}(\sqrt[3]{x^2+2})$

الجواب :

$$\lim_{X\to 5}(\sqrt[3]{x^2+2})=\sqrt[3]{\lim_{X\to 5}x^2+\lim_{X\to 5}2}$$

وذلك بتطبيق القاعدة رقم (٦) ومن ثم تطبيق القاعدتين (١، ٢) نحصل على :

$$\sqrt[3]{25+2}=\sqrt[3]{27}=3$$

مثال (٧) :

جد: $\lim_{X\to 3}(x-1)^2$

الجواب :

بتطبيق القاعدة رقم (٥) ينتج :

$$\lim_{X\to 3}(x-1)^2=(\lim_{X\to 3}x-\lim_{X\to 3}1)^2$$

$$=(3-1)^2=4$$

تمارين (١-٤)

جد قيمة النهايات الآتية:

١- $\lim_{X\to 1}(x^2-2x+5)$

٢- $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2}{x^2 + x - 12}$

٣- $\lim_{y \to 4} \frac{y+1}{y^2 + 2y + 1}$

٤- $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 \sqrt{x+3}}{x^2 + 3}$

٥- $\lim_{z \to 2} \frac{z^2 - 4}{z - 2}$

٦- $\lim_{y \to 4} \sqrt{\frac{y-3}{6y+1}}$

٧- $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x-2}}{4x + 1 - (x+1)}$

٨- $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 7x - 1}{\sqrt{x}}$

٩- $\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})(5 - \frac{1}{x})$

١٠- $\lim_{x \to \infty} (\frac{x^2 + 3}{x - 3})$

٤-٤ الاستمرارية Continuity

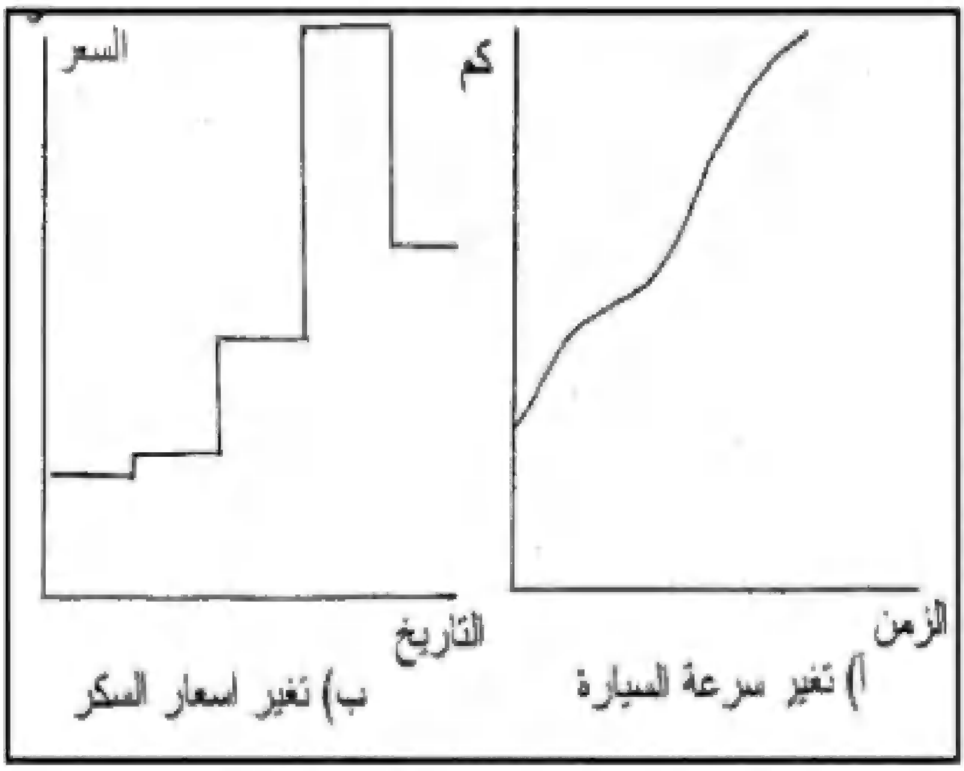
من المستحيل على سيارة أن تغير سرعتها من 35 كم/الساعة إلى 60 كم/الساعة دفعه واحده بل يتم ذلك تدريجيا" أي خلال فترة من الزمن يكون دفعة واحدة بل يتم ذلك

الجزء الثاني

تدريجياً أي خلال فترة من الزمن يكون مؤشر السرعة في كل لحظة منها قد أشار إلى سرعة معينة بين 35 - 60 كم/الساعة مادام الضغط مستمراً على مسرع السيارة لبلوغ السرعة الأخيرة . وباستطاعتنا اختيار أي معدل بين هذين الحدين . مثلاً في لحظة معينة نرى المؤشر عند (38.5) كم/الساعة وفي أخرى 39.0 كم/الساعة وبين هاتين اللحظتين كان العداد قد أشار إلى 38.80 وفي لحظة إلى 38.84 وأخرى إلى 38.845 وفي لحظه أخرى إلى 38.8451 وهكذا. إن هذا المثال يشير إلى التغير التدريجي لسرعة السيارة أما إذا تابعنا حركة سلعة لدى بائع مفرد مثل السكر نلاحظ إن سعر الكغم الواحد يمكن أن يتغير من (150) إلى (160) أو بشكل أكثر تواضعا" من (150) إلى (151) ولكن ليس من السهل أن يتغير السعر من (150) إلى 150.4531 فهذا أمر لم يحدث في الواقع إلا نادرا" جدا" .

إن كلاً من سرعة السيارة وسعر السكر هما كميتان متغيرتان ولكن كل منهما يتغير بطريقة مختلفة. إن سرعة السيارة تتغير تغيراً مستمراً (Continuous) مارة بكل السرع ما بين 35 كم/الساعة و 60 كم/الساعة . أما التغير في سعر السكر المفرد فإنه تغير غير مستمر (discontinuous) (غير مترابط) كأن يتغير من 150 إلي 151 ثم إلى 156 ثم إلى 170 وينخفض إلى 160 وهكذا يمكن تمثيل ذلك بالرسم كما في الشكل

.(4-1)

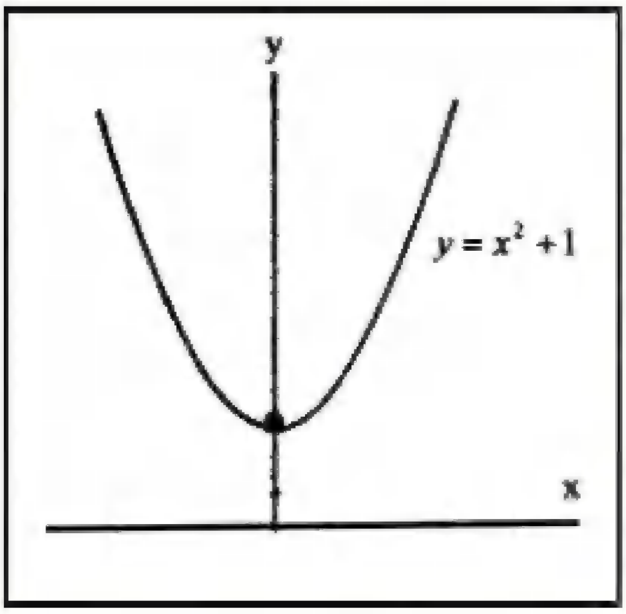


شكل رقم (٤-١)

إن مفهوم الاستمرارية ذو علاقة بمفهوم النهاية لكونه يعطي صفة الدالة : فيما إذا كانت مستمرة أم غير مستمرة وهذه الصفة تنعكس على اتجاه الدالة وسلوكها عند أية نقطة يتم اختيارها. فما هو مفهوم الاستمرارية من الناحية الرياضية؟

تأمل الدالة التالية : $y = x^2 + 1$

فعند تمثيل هذه الدالة بيانياً تظهر بالشكل رقم (4-2)



شكل رقم (٢-٤)

إن المنحنى الذي يمثل الدالة $y = x^2 + 1$ هو خط متصل أي يمكن رسمه بشكل متواصل دون أن نرفع القلم عن الورقة أي لا يوجد في هذا المنحني ثغرة أو قفزة فهو خط مستمر متراص يحتوي على ما لا نهاية من النقاط (من الإعداد الحقيقية). إن خطأ من هذا النوع يسمى خط مستمر والدالة تسمى <u>دالة مستمرة</u> عند جميع النقاط وتكون <u>الدالة معرفة</u> في كل نقطة من نقاط مجال الدالة.

أما نهاية الدالة عند أية نقطة على المنحني فتساوي قيمة الدالة عند تلك النقطة.

واستناداً إلى ما ذكر أعلاه يمكن تعريف استمرارية الدالة بالآتي :

تكون f(x) دالة مستمرة عند $x \to a$

إذا كانت : $\lim_{X \to a} f(x) = f(a)$

ولهذا فإن الدالة تكون دالة مستمرة عند أية قيمة من قيم a التي تقع ضمن مجال الدالة.

وعلى هذا الأساس يشترط بـ f(x) كي تكون مستمرة عندما x = a أن يتحقق ما يأتي :-

(a) وجود f(x):

(b) وجود $\lim_{X \to a} f(x)$:(4-9)

(c) وجود $\lim_{X \to a} f(x) = f(a)$:

إن الدالة المستمرة يمكن أن تتحول إلى دالة غير مستمرة إذا حدث ما يأتي :

(a) إذا كانت f(a) غير معرفة وان: $\lim_{X \to a} f(x)$ غير موجودة فإن الدالة تكون غير مستمرة بشكل غير محدد عند $x = a$.

(b) إذا كانت f(a) معرفة ولكن: $\lim_{X \to a} f(x)$ غير موجودة فإن الدالة تكون غير مستمرة بشكل محدد عند $x = a$.

(c) إذا كانت f(a) غير معرفة ولكن: $\lim_{X \to a} f(x)$ موجودة فإن الدالة تكون غير مستمرة مفقودة النقطة عند $x = a$.

<u>ملاحظة :</u>

تكون الدالة المنفصلة (discrete function) معرفة فقط عند قيم محددة للمتغير المستقل x في أية فاصلة مسافة. وتكون غير مستمرة عند القيم الأخرى غير المحددة للمتغير (x) في فاصلة المسافة. وما دامت قيم (x) يفترض بها أن تكون منفصلة لهذا فإن مفهوم النهاية لا يتلائم مع الدالة المنفصلة.

لنأخذ بعض الأمثلة الإيضاحية :-

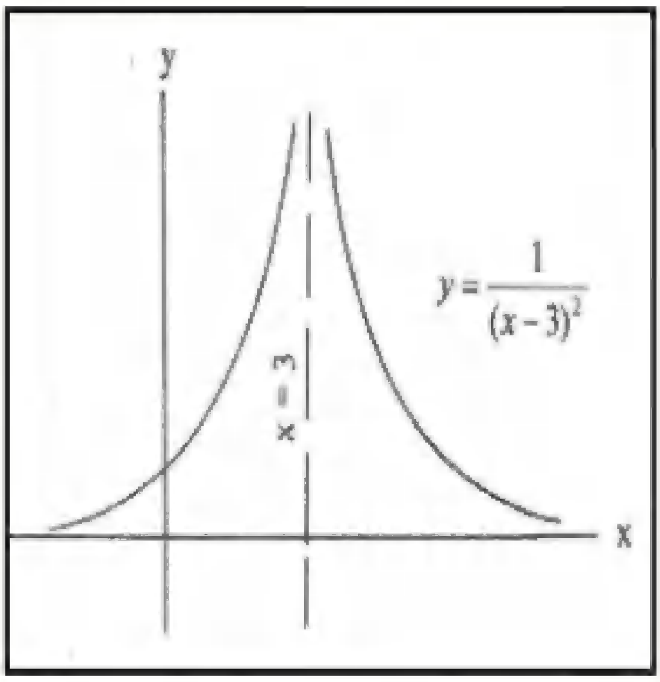
<u>مثال (١)</u>

حدد فيما إذا كانت $y = \frac{1}{(x-3)^2}$ دالة مستمرة أو غير مستمرة عندما x = 3

الجواب:

$$f(3)\frac{1}{(3-3)^2}=\infty$$

إذن $f(x)\to\infty$ عندما 3 = aأي أن الدالة غير مستمرة بشكل غير محدد عندما x = a وتكون $f(3)$ غير معرفة ولكنها تكون مستمرة في النقاط الأخرى ما عدا x = a = 3 كما يظهر في الشكل رقم (3-4):



شكل رقم (٣-٤)

مثـال (٢):

بين استمرارية الدالة الآتية:

$y=x^2+3x+1$ عند x = 2

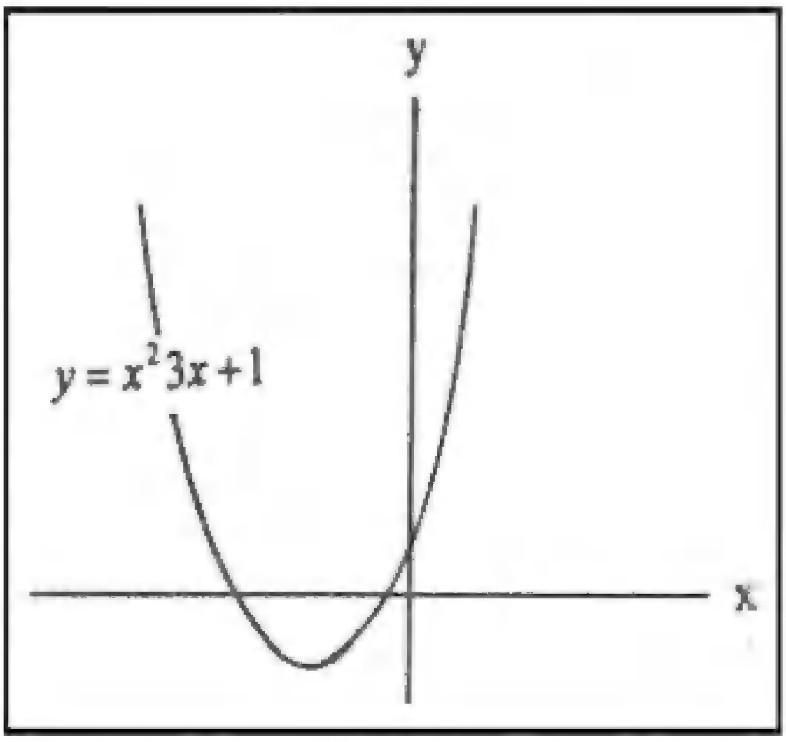
الجواب:

عندما $x=2$ فإن: $f(2)=(2)^2+3(2)+1=11$

أما: $\lim_{x\to 2} f(x)=(2)^2+3(2)+1=11$

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)=f(a)=11$$

لذلك فإن الدالة مستمرة عند 2 = xكما مبين في الشكل (4-4)



شكل رقم (٤-٤)

مثـال (٣) :

جد قيمة x التي عندها تكون الدالة الآتية غير مستمرة حاول أن تزيل عدم الاستمرارية و وضح

طريقة العمل:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

الجواب :

تكون f(x) غير مستمرة عندما x = 1 وذلك لان :

$$f(1) = \frac{1 - 1}{1 - 1} = 0$$

أي أن الدالة تكون غير معرفة عندما x = 1 أما في النقاط الأخرى فإن ها تكون معرفة ومستمرة .

ويمكن إزالة حالة عدم الاستمرار عند x = 1 وذلك كالآتي :

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)}$$

$$\therefore f(x) = x + 1$$

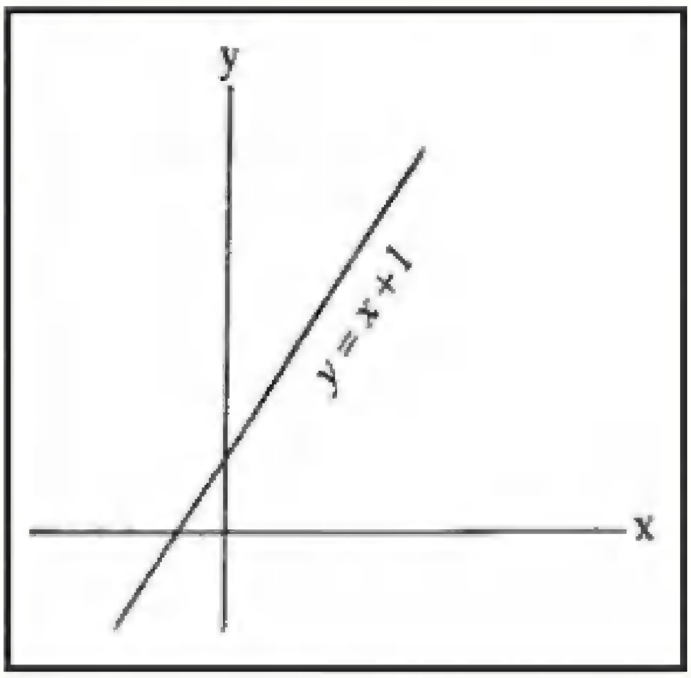
وبذلك نحصل على :

$$f(1) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 + 1 = 2$$

إذن تكون الدالة مستمرة عند جميع النقاط بعد إعادة تكييفها لتصبح بالصورة الآتية $f(x) = x + 1$ بدلا من الصيغة الأولى .

كما في الشكل رقم (4-5) :



شكل رقم(٥-٤)

مثال (٤):

بين فيها إذا كانت الدالة الآتية مستمرة أو غير مستمرة عند قيمة معينة من قيم x . ثم أزل حالة عدم الاستمرار .

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$$

الجواب :

تكون الدالة غير مستمرة عندما 2- = x وذلك لأن:

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} = \frac{(-2)^2 + 5(-2) + 6}{-2 + 2} = 0$$

حيث يتبين أن الدالة غير معرفة ولهذا فهي غير مستمرة عندما x = -2 ولكن إذا أعدنا تكييف الدالة بالصورة الآتية نحصل على :-

$$f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x+2} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)} = x+3$$

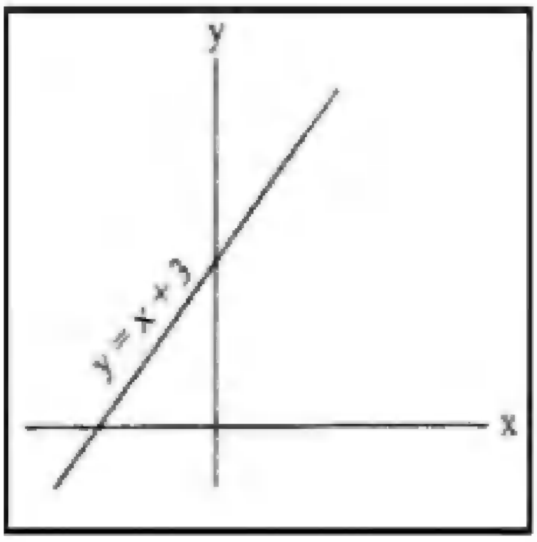
وهنا إذا كان x = -2 فإن :

$$f(-2) = (-2) + 3 = 1$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = (-2) + 3 = 1$$

إذن تكون الدالة بالصورة الجديدة $f(x) = x+3$ دالة مستمرة عند جميع قيم x ومنها x=-2 .

كما يظهر في الشكل رقم (4-6)



شكل رقم(٦-٤)

مثال(٥):

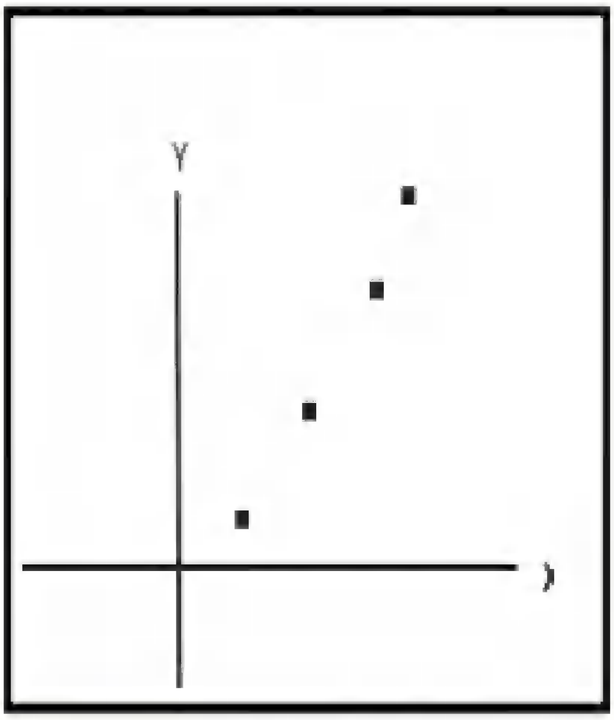
يبيع صاحب متجر العلبة الواحدة من الصابون بـ (25) وعلى هذا الأساس كانت دالة العائدات لهذا السلعة بالصورة الآتية :-

$$y = 25x$$

حيث يمثل y مجموع العائدات x الكميات المطلوبة . ارسم الدالة المذكورة وبين فيما إذا كانت مستمرة أو منفصلة .

الجواب:

الدالة كما هو واضح منفصلة ما دامت لا تحتوي الأعلى قيم صحيحة فقط للمتغير x . أي (....1,2) وعلية تظهر كما في الشكل رقم (4-7)



الشكل رقم (٤-٧)

تمارين (٤-٢)

ابحث في استمرارية الدوال الآتية وجد قيم x التي عندها تكون الدالة غير مستمرة.

١- $f(x) = \frac{x^2+8}{x+3}$

٢- $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

٣- $f(x) = \frac{2}{x(x-5)}$

٤- $f(x) = \frac{x^2-2x}{x^3-x^2}$

٥. $f(x) = \dfrac{x^2 + 10x + 1}{x^2 - 9}$

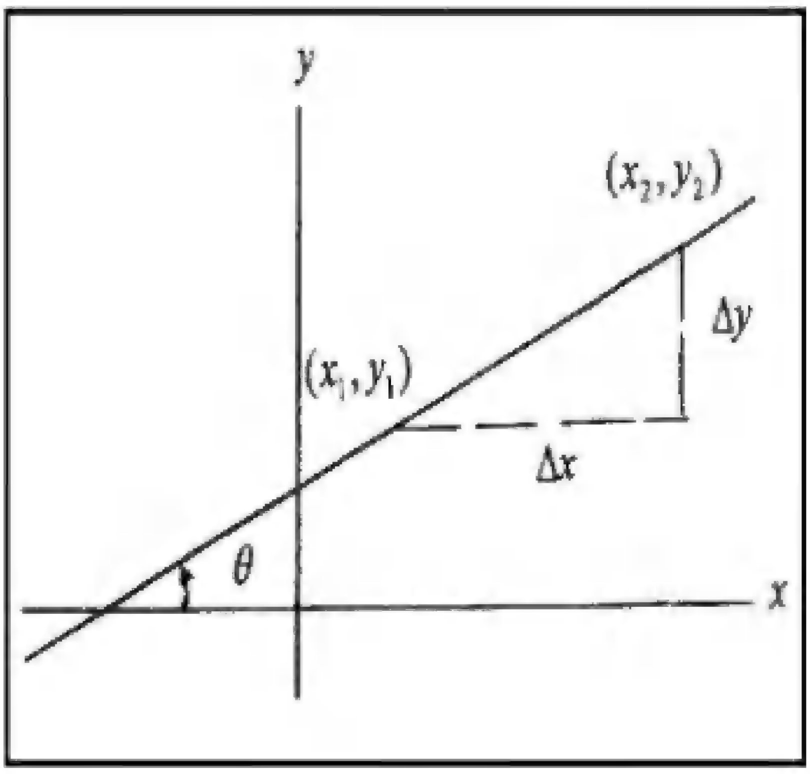
٦. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

٧. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x - 6}$

٤_٥ المشتقة Derivative

4-5-1-تعريف

نتذكر عند دراستنا لمعادلة الخط المستقيم $y = a + bx$ بHأن ميل الخط المستقيم (b) يعرف بأنه ظل زاوية انحداره. وبمعنى آخر انه النسبة بين التغير في الاتجاه العمودي والتغير في الاتجاه الأفقي كلما تحركت النقطة على هذا الخط كما في الشكل (4-8).



شكل رقم (٨-٤)

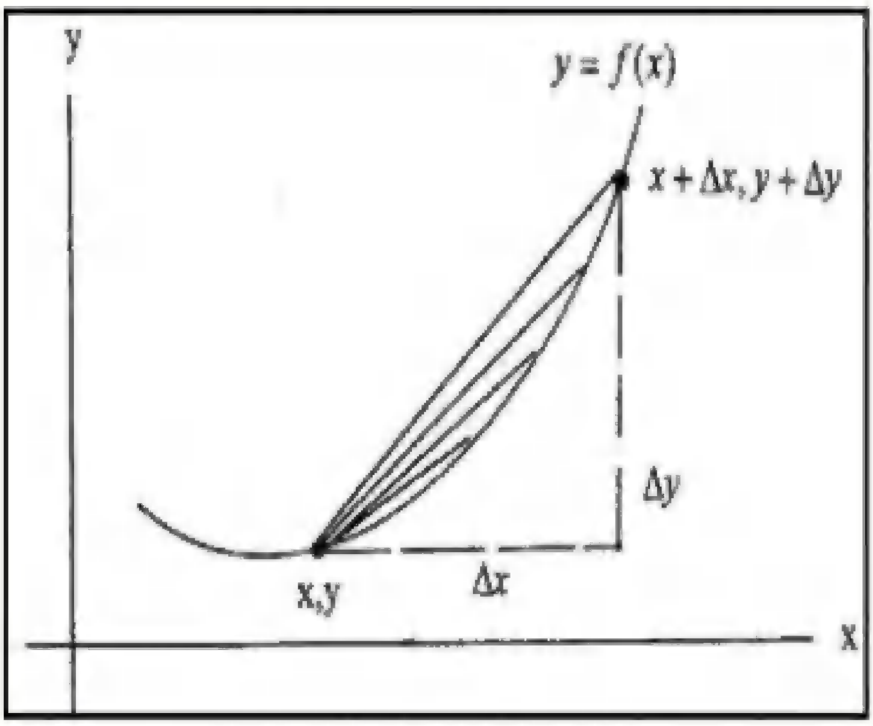
وقد ذكرنا بان ميل أي خط مستقيم هو ثابت. وبكلام آخر أن معدل التغير في y يبقى ثابتا في حالة تحرك x على طول الخط . ولكن في حالة المنحنى يتغير الحال فيصبح

الميل غير ثابت ويتغير عند كل نقطة من نقاط المنحنى، فإذا افترضنا بأن $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ هما أية نقطتين على المنحني y=f(x) فإن ميل الخط الذي يصل النقطتين (x_2, y_2) و (x_1, y_1) سيكون:

$$b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (4\text{-}10)$$

ولكي نتعرف على سلوك الميل في حالة المنحنى نفترض بان النقطة (x_1, y_1) ثابتة مع بقاء النقطة (x_2, y_2) تتحرك على طول المنحنى y=f(x) باتجاه النقطة (x_1, y_1) وحين تتحرك النقطة (x_2, y_2) على طول المنحنى f(x) فإن ميل الخط الذي يربط النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) سوف يتغير من نقطة إلى أخرى وعموما يميل إلى التناقص شيئا فشيئا مقتربا نحو قيمة ثابتة محددة كلما اقتربت النقطة (x_2, y_2) شيئا فشيئا من النقطة (x_1, y_1):

وعند ذاك يقال للقيمة المحددة الثابتة بأنها ميل المماس للمنحنى عند النقطة (x_1, y_1) أو ميل المنحنى عند النقطة (x,y) كما في الشكل (4-9)



شكل رقم (٤-٩)

والآن خذ العلاقة (4-9) مرة ثانية ولاحظ بأنه عندما يتجه الفرق بين x_2, x_1 نحو الصفر أي عندما $\Delta x \to 0$ فإن الميل b يصبح ميل المنحنى عند النقطة (x_1, y_1) أي أن:

ميل المنحنى عند النقطة يساوي :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = (x_1, x_2) \qquad (4\text{-}11)$$

وبصورة عامة إذا كانت النقطة (x, y) هي نقطة الاستقرار أي ثابتة فإن النقطة المتحركة (x_2, y_2) يمكن أن نرمز لحركتها بالآتي: $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ وعندها نحصل على :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (4\text{-}12)$$

وعندئذ نكون قد حصلنا على المشتقة الأولى للدالة $y = f(x)$ عند النقطة (x_1, y_1) نقطة معينة .

4-5-2-استخراج المشتقة

يشار لعمليات استخراج المشتقة الأولى لدالة معينة بالتفاضل وتستخدم رموز عديدة للمشتقة الأولى منها $\frac{dy}{dx}$ وتقرا المشتقة الأولى للدالة $y = f(x)$ بالنسبة إلى x ومن الرموز الأخرى هي:

$$D_x(y), D_x y, \frac{d}{dx}(y), y', f'(x)$$

وتستخرج المشتقة بإتباع الخطوات الآتية :-

١- نأخذ الدالة $y = f(x)$

٢- نزيد x بمقدار Δx فتزداد y بمقدار Δy وكما يأتي:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

٣- نعيد ترتيب المعادلة ونعوض عن قيمة $y = f(x)$ فنحصل على :-

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

٤- نقسم الطرفين على Δx ينتج :-

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

٥- نأخذ النهاية عندما $(\Delta x \to 0)$ فنحصل على المشتقة الأولى:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x-\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

إن المقدار $\frac{dy}{dx}$ ليس نسبة بين dy,dx بل انه كمية معينة نجمت عن عملية استخراج معدل التغير للدالة ومن ثم يأخذ نهاية معدل التغير هذا عندما يقترب التغير في x من الصفر .

ويمكن توضيح ذلك بالأمثلة الآتية :

مثال (١):

اوجد المشتقة الأولى للدالة التالية :

$$y = 2x + 4$$

الجواب :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x-\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x) + 4 - (2x+4)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + 2\Delta x + 4 - 2x - 4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$$

إذن المشتقة الأولى للدالة $y = 2x + 4$ هي (2) ويلاحظ إنها عدد ثابت لان الدالة هي معادلة خط مستقيم وان ميل الخط المستقيم مقدار ثابت .

الجزء الثاني

مثال (٢) :

اوجد المشتقة الأولى للدالة الثانية :

$$y = 3x^2 + x$$

الجواب :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) - (3x^2 + x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + x + \Delta x - 3x^2 - x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + \Delta x}{\Delta x}$$

وبالاختصار نحصل على :

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x + 1)$$

$$= 6x + 1$$

٤_٦ معدل تغير الدالة (Rate of Change of Function)

دع $y = f(x)$ فإذا كانت للنسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نفس القيمة لكل قيم Δx (أي أنها ثابتة) فإن هذه النسبة تسمى معدل التغير في y بالنسبة إلى المتغير x . ويقال للمتغير y بأنه يتغير بشكل متناسق بالنسبة إلى x .

ولكن إذا كانت النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ليست ثابتة عندما يتغير Δx أي أن المتغير y لا يتغير بشكل متناسق عندما يتغير Δx فإن $\frac{dy}{dx}$ يقال لها بأنها متوسط معدل التغير في y ،بالنسبة إلى x على مدى فاصلة المسافة Δx .

وإذا اقتربت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ من نهايتها عندما $(\Delta x \to \infty)$ فإن هذه النهاية تسمى معدل التغير اللحظي للمتغير y بالنسبة إلى المتغير x . ومن تعريف المشتقة يمكن الحصول على التغيير الخطي لـ(y) بالنسبة إلى المتغير (x) باستخراج المشتقة $\frac{dy}{dx}$ ويستخدم تعبير (معدل تغير الدالة) كرديف لمشتقة الدالة في بعض الأحيان.

ملاحظة :

١- إن نهاية الدالة يمكن أن توجد عند قيم x أو لا توجد وعندما توجد النهاية تكون للدالة مشتقة أي يمكن مفاضلتها وبعكسه لا يمكن مفاضلتها .

٢- إن مشتقة الدالة بالنسبة إلى x ما هي إلا دالة جديدة للمتغير x أيضاً .

٧-٤ قواعد التفاضل

إن استخراج المشتقة بطريقة اخذ نهاية معدل التغير أو ما يسمى بطريقة الـ (Δ) مطولة وصعبة وتحتوي على عمليات كثيرة ومعقدة وخاصة مع بعض الدوال ولهذا فقد وضع الرياضيون القواعد الآتية لاستخراج مشتقات الدوال بسهولة ويسر :-

القاعدة (١): مشتقة المقدار الثابت تساوي صفراً.

فإذا كانت لدينا الدالة الآتية $y = c$

فإن : $\frac{dy}{dx} = 0$

أمثلة

١- مشتقة $y = 4$ هي:

$\frac{dy}{dx} = 0$ (لأن المقدار (4) هو مقدار ثابت).

٢- مشتقة $y = 0$ هي :

$$\frac{dy}{dx} = 0$$ (لأن المقدار (٥) هو مقدار ثابت)

القاعدة (٢): مشتقة مجموع (أو الفرق بين) دالتين أو أكثر تساوي مجموع (أو الفرق بين) مشتقات هذه الدوال.

فإذا كانت لدينا الدالة الآتية:

$y = u + v$ حيث أن : $u = f(x), v = g(x)$ وهي دوال تفاضلية في x فإن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

القاعدة (٣): مشتقة حاصل ضرب مقدار ثابت بدالة تفاضلية هي حاصل ضرب المقدار الثابت بمشتقة تلك الدالة.

فمشتقة الدالة الآتية $y = cu$ وان $u = f(x)$ هي :

$$\frac{dy}{dx} = c\frac{du}{dx}$$

القاعدة (٤): مشتقة الدالة : $y = x^n$ هي :

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

لنأخذ بعض الأمثلة التي توضع القواعد (٢،٣،٤) معاً:

١- جد مشتقة الدالة الآتية :

$$y = 3x^2$$

الجواب :

$$\frac{dy}{dx} = 3(2)x^{2-1} = 6x$$ (حسب القاعدة ٣،٤)

٢- جد مشتقة الدالة الآتية :

$$y = 4x^3 - 5x^2 + 7$$

<u>الجواب:</u>

$$\frac{dy}{dx} = 4(3)x^{3-1} - 5(2)x^{2-1} + 0$$

$$= 12x^2 - 10x$$

وذلك بتطبيق القواعد (١،٢،٣،٤)

٣- جد مشتقة الدالة الآتية :

$$y = 8x^{\frac{1}{4}} - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 8(\frac{1}{4})x^{\frac{1}{4}-1} - 0$$

$$= 2x^{-\frac{3}{4}}$$

٤- جد مشتقة الدالة :

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x + 6$$

ثم احسب قيمة المشتقة عندما $x = 2$

<u>الجواب:</u>

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 4$$

وعندما $x = 2$ فإن :

$$\frac{dy}{dx} = 3(2)^2 - 6(2) + 4 = 4$$

الجزء الثاني

٥- جد مشتقة الدالة الآتية :

$$y = x^3 + x^2 - x - 1$$

ثم جد قيمة x عندما تكون قيمة المشتقة = 0

الجواب :

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x - 1$$

وعندما $\frac{dy}{dx} = 0$ فإن :

$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$(3x - 1)(x + 1) = 0$$

إما $3x - 1 = 0$ أو $x + 1 = 0$

و $x = \frac{1}{3}$ و $x = -1$

القاعدة (٥): مشتقة حاصل ضرب دالتين تفاضليتين يساوي:

الدالة الأولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الأولى

وبالمثل فإن مشتقة حاصل ضرب أكثر من دالتين يساوي مجموع حاصل ضرب مشتقة كل دالة في الدوال الأخرى .

فإذا كانت $y = uv$

وإن $u = f(x)$ و $v = g(x)$ دالتين تفاضليتين في x فإن :

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

وبالمثل إذا كانت : $y=\prod_{i=1}^{n} ui$ حيث أن : $ui = fi(x)$ هي دوال تفاضلية.

لـx و $(i = 1,2,\dots,n)$ فإن :

$$\frac{d}{dx} = \left(\prod_{i=1}^{n} ui\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[f_i'(x)\prod_{j=1}^{n} uj\right] \quad (j \neq i)$$

أمثلة

١- إذا كانت $y = (x^2+3)(x^5+1)$ فإن مشتقة هذه الدالة إذا أخذت بالصيغة $y = uv$

هي :

$$u = x^2 + 3$$

$$v = x^5 + 1$$

وإن :

$$\frac{du}{dx} = 2x, \frac{dv}{dx} = 5x^4$$

ولما كان $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

فإن : $\frac{dy}{dx} = (x^2+3)(5x^4) + (x^5+1)(2x)$

$$= 5x^6 + 15x^4 + 2x^6 + 2x$$

$$= 7x^6 + 15x^4 + 2x$$

٢- جد مشتقة الدالة الآتية :

$$y = (2x+3)(x^3+2)(x^2+5)$$

الجزء الثاني

<u>الجواب :</u>

لدينا: $u = 2x+3, v = x^3+2, z = x^2+5$

كما أن: $\frac{du}{dx} = 2, \frac{dv}{dx} = 3x^2, \frac{dz}{dx} = 2x$

وحسب القاعدة رقم (٥) فإن :

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{du}{dx}.vz\right] + \left[\frac{dv}{dx}uz\right] + \left[\frac{dz}{dx}uv\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left[2\left(x^3+2\right)\left(x^2+5\right)\right] + \left[3x^2(2x+3)(x^2+5)\right] + \left[2x(2x+3)(x^3+2)\right]$$

$$= \left[2x^5+10x^3+4x^2+20\right] + \left[6x^5+30x^3+9x^4+45x^2\right] + \left[4x^5+8x^2+6x^4+12x\right]$$

$$= 12x^5+15x^4+40x^3+57x^2+12x+20$$

<u>القاعدة (٦)</u>: مشتقة حاصل قسمة دالتين تفاضليتين هي: حاصل ضرب المقام في مشتقة البسط مطروحاً منه حاصل ضرب البسط في مشتقة المقام مقسوم على مربع المقام.

فإذا كانت:

$y = \frac{u}{v}$ وان $u = f(x)$ و $v = g(x)$

هي دوال تفاضلية في x فإن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

أمثلة

١- إذا كانت : $y = \frac{2x^2 - x}{x^2 + 5}$

فإن :

$$u = 2x^2 - x \qquad , v = x^2 + 5$$

$$\frac{du}{dx} = 4x - 1 \qquad , \frac{dv}{dx} = 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+5)(4x-1) - (2x^2 - x)(2x)}{(x^2+5)^2}$$

$$= \frac{4x^3 - x^2 + 20x - 5 - 4x^3 + 2x^2}{x^4 + 10x^2 + 25}$$

$$= \frac{x^2 + 20x - 5}{x^4 + 10x^2 + 25}$$

٢- إذا كانت : $y = \frac{7}{x^3 - 1}$

فإن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^3-1)(0) - 7(3x^2)}{(x^3-1)^2}$$

$$= \frac{-21x^2}{x^6 - 2x^3 + 1}$$

القاعدة (٧) : مشتقة الدالة التفاضلية المرفوعة إلى قوة n هي حاصل ضرب n × الدالة مرفوعة إلى قوة $(n-1)$ × مشتقة الدالة .

فإذا كانت $y = u^n$ وان $u = f(x)$ هي دالة تفاضلية في x أما n فهي أي عدد حقيقي (موجب أو سالب : صحيح أو كسر) فإن:

$$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

أمثلة

مثال (١)

إذا كانت $y = \left(3x^2 - 4\right)^5$

فإن :

$$\frac{dy}{dx} = 5\left(3x^2 - 4\right)^4 (6x)$$

$$= -30x\left(3x^2 - 4\right)^4$$

مثال (٢)

إذا كانت : $y = \left(x^2 + 2\right)^3 \left(x + 3\right)^{-1}$

لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ تطبق القاعدة ٤،٦ معاً:

$$u = \left(x^2 + 2\right)^3$$

$$v = \left(x + 3\right)^{-1}$$

$$\frac{du}{dx} = 3\left(x^2 + 2\right)^2 (2x) = 6x\left(x^2 + 2\right)^2$$

$$\frac{dv}{dx} = -\left(x + 3\right)^{-2}(1) = -(x+3)^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+2)^3(-1)(x+3)^{-2} + (x+3)^{-1}(6x)(x^2+2)^2$$

$$= \frac{-(x^2+2)^3}{(x+3)^2} + \frac{6x(x^2+2)^2}{(x+3)}$$

$$= \frac{6x(x+3)(x^2+2)^2 - (x^2+2)^3}{(x+3)^2}$$

<u>القاعدة (٨)</u> : مشتقة الدوال اللوغرتيمية : لقد ذكرنا سابقا بأن اللوغاريتم الطبيعي هو (لوغاريتم نابير) Naperinan Logarithm ويرمز له بالرمز (ln) تمييزا عن اللوغاريتم الاعتيادي الذي عادة ما يرمز له بالرمز (log) أن أساس اللوغاريتم الطبيعي يرمز له بـ (e) وإن :

$$e = \lim_{n \to \infty}(1+\frac{1}{n})^n \approx 2.718$$

أما أساس اللوغاريتم الاعتيادي فهو (10) وإذا استخدم أساس آخر فينبغي أن يذكر . أما مشتقة الدالة اللوغاريتمية فهي كالآتي :

مشتقة اللوغاريم الطبيعي للمتغيرx بالنسبة إلى x تساوي مقلوب x.

خذ الدالة $y = \log_e x = \ln x$

إن مشتقة هذه الدالة بالنسبة للمتغير x هي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

وإذا كانت $y = \log u$ وان $u = f(x)$ أي: $y = \ln u$

فإن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

أما إذا اتخذ (a) أساس للوغاريتم ليشير إلى أي أساس يقع عليه الاختيار وذلك كما يلي :

إذا كانت $y = \log_a u$ وان $u = f(x)$ دالة تفاضلية في x فإن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log_a e}{u}\frac{du}{dx}$$

<u>مثال(١) :</u>

اوجـد $\frac{dy}{dx}$ مـن الدالـة التاليـة وعـلى افـتراض أن أسـاس اللوغـاريتم لـيس طبيعيـاً:

$$y = \log(x^2 + 1)$$

الجواب:

تساوي ما يلي :

نفترض أن $u = x^2 + 1$ ولهذا فإن : $\frac{du}{dx} = 2x$

إذن : $\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{x^2+1}2x = \frac{2x}{x^2+1}\log e$

مثال (٢):

إذا كانت $y = \sqrt{\log x}$ فما قيمة مع العلم أن أساس اللوغاريتم هو ليس طبيعياً.

الجواب:

الدالة $y = \sqrt{\log x}$ يمكن إعادة كتابتها بالصور التالية:

$$y = (\log x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{x}\frac{1}{2}(\log x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(\log x)^{-\frac{1}{2}}\frac{\log e}{x}(1)$$

$$= \frac{\log e}{2x\sqrt{\log x}}$$

مثال (٣):

إذا كانت : $y = \log_e \sqrt{x^2 - 1}$

أوجد $\frac{dy}{dx}$

الجواب:

بما أن أساس اللوغاريتم هو e إذن اللوغاريتم المستخدم في الدالة هو اللوغاريتم

الطبيعي وحيث أن: $\log_e = 1$ ، لذلك فإن : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

وعند تطبيق العلاقة أعلاه نحصل على :

$$u = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$= (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)(2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = [\frac{1}{(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}]\frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}(2x)$$

$$= \frac{x}{(x^2 - 1)}$$

<u>مثال (٤) :</u>

إذا كانت : $y = \frac{\log_e x}{x}$

اوجد : $\frac{dy}{dx}$

<u>الجواب :</u>

لندع أولاً : $z = \log_e x$

فإذا كانت : $u = x$

نستعين بالقاعدة (٦ ، ٨) معاً:

$$\therefore \frac{du}{dx} = 1$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{x}(1) = \frac{1}{x}$$

الآن نستخرج مشتقة $y = \frac{z}{u}$ حسب القاعدة (٨) التي تقول :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u\frac{dz}{dx} - z\frac{du}{dx}}{u^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(\frac{1}{x}) - \log_e x(1)}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \log_e x}{x^2}$$

مثال (٥):

جد مشتقة الدالة الآتية :

$$y = \ln\sqrt{x^3 + 2}$$

الجواب:

يمكن إعادة صياغة الدالة بالاتي:

$y = \ln(x^3 + 2)^{\frac{1}{2}}$ ونفترض أن $u = (x^3 + 2)^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

$$= [\frac{1}{(x^3 + 2)^{\frac{1}{2}}}]\frac{1}{2}(x^3 + 2)^{-\frac{1}{2}}(3x^2)$$

$$= \frac{3x^2}{2(x^3 + 2)}$$

مثال(٦):

جد مشتقة الدالة الآتية :

$$y = 2\ln(x^3 + 4x^2)^{\frac{1}{4}}$$

<u>الجواب</u> : نعيد صياغة الدالة استناداً لقواعد اللوغاريتمات كما يلي:

$$y = \ln(x^3 + 4x^2)^{\frac{1}{4}\times 2}$$

$$= \ln(x^3 + 4x^2)^{\frac{1}{2}}$$

ونفترض أن: $u = (x^3 + 4x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left[\frac{1}{(x^3 + 4x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]\left(\frac{1}{2}\right)(x^3 + 4x^2)^{-\frac{1}{2}}(3x^2 + 8x)$$

$$= \frac{3x^2 + 8x}{2(x^3 + 4x^2)}$$

$$= \frac{3x + 8}{2(x^2 + 4x\ \ )}$$

<u>القاعدة (٩)</u>: مشتقة الدوال الأسية

ذكرنا بان الدالة الأسية هي الدالة التي فيها ثابت مرفوع إلى أس متغير مثال ذلك $y = a^x$ حيث أن (a) هو الأساس و(x) هو الأس أو القوة التي يرفع إليها الثابت (a).

أما مشتقة الدالة الأسية فيمكن أن نضعها في ثلاثة حالات :

أ- إذا كانت الدالة الأسية بالصيغة الآتية: $y = a^u$ وان $u = f(x)$ دالة تفاضلية في x فإن :

$$\frac{dy}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

لنتناول بعض الأمثلة:

مثال (١) :

جد مشتقة الدالة الآتية:

$$y = 3^{-2x}$$

الجواب:

نجعل $u = -2x$

لذلك فإن : $\frac{dy}{dx} = 3^{-2x} \ln 3(-2)$

$$= -2(3)^{-2x} \ln 3$$

مثال (٢):

جد مشتقة الدالة الآتية :

$$y = 6^{x} x^{2}$$

الجواب:

نستخدم القاعدة (٩-٤)

$$u = 6^{x}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 6^{x} \ln 6(1)$$

$$v = x^{2}$$

$$\therefore \frac{dv}{dx} = 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 6^{x}(2x) + (x^{2})[(6)^{x}(\ln 6)(1)]$$

$$= 6^{x}(2x) + x^{2}(6^{x} \ln 6)$$

ب- عندما تكون $y = e^u$ و $u = f(x)$ دالة تفاضلية في x فإن:

$$\frac{dy}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$$

خذ الأمثلة الآتية:

١- جد مشتقة الدالة الآتية:

$$y = e^{-\frac{1}{x}}$$

<u>الجواب:</u>

نفترض أن: $u = -\frac{1}{x} = -x^{-1}$

إذن: $\frac{du}{dx} = x^{-2}$

وبذلك نحصل على:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-\frac{1}{x}} x^{-2}$$

$$= \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$$

٢- جد مشتقة الدالة الآتية:

$$y = e^{x^2+2x-5}$$

$$u = x^2 + 2x - 5$$

$$\frac{du}{dx} = 2x + 2$$

وهكذا تكون المشتقة كالآتي:

$$\frac{dy}{dx} = (2x+2)e^{x^2+2x-5}$$

الجزء الثاني

٣- جد مشتقة الدالة الآتية :

$$y = 3 \times e^{x^2+1}$$

الجواب:

نفترض أن $u = x^2 + 1$ وبهذا فإن $\frac{du}{dx} = 2x$ والآن نجد المشتقة المطلوبة وواضح أنها مشتقة حاصل ضرب دالتين :

$$\frac{dy}{dx} = 3x\left(e^{x^2+1}\right)(2x) + e^{x^2+1}(3)$$

$$= 3(2x^2 + 1)(e^{x^2+1})$$

٤- جد مشتقة الدالة الآتية :

$$y = e^{3x^2}$$

الجواب :

نفترض أن : $u = 3x^2$ وبهذا فإن : $\frac{du}{dx} = 6x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{3x^2}(6x)$$

٥- ما هي مشتقة الدالة الآتية :

$$y = \frac{e^x}{x}$$

الجواب:

نفرض أن $u = x$ إذن : $\frac{du}{dx} = 1$

إذن : $\frac{dy}{dx} = \frac{xe^x(1) - e^x(1)}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$

٦- جد مشتقة الدالة الآتية :

$$y = xe^{\ln(x^2+5)}$$

<u>الجواب :</u>

نبسط الدالة كالآتي :

$$\ln y = \ln x + \ln(x^2+5)\ln e$$

وحيث أن : $\ln e = 1$

$$\therefore \quad \ln y = \ln x + \ln(x^2+5)$$

$$y = x(x^2+5) = x^3 + 5x$$

والآن نبحث عن المشتقة :

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 5$$

٧- جد مشتقة الدالة الآتية:

$$y = \frac{1}{3}e^{3\ln x}$$

<u>الجواب :</u>

نبسط الدالة كما يأتي :

$$\ln y = \ln\frac{1}{3} + 3\ln x \ln e$$

وحيث أن : $\ln e = 1$

$$\therefore \quad \ln y = \ln\frac{1}{3} + 3\ln x$$

$$y = \frac{1}{3}x^3$$

والآن نجد المشتقة :

$$\frac{dy}{dx} = x^2$$

الجزء الثاني

٨- جد مشتقة الدالة الآتية:

$$y = x^3 e^{-2\ln x}$$

الجواب:

نبسط الدالة كالآتي :

$$\ln y = 3\ln x - 2\ln x \ln e$$

وحيث أن : $\ln e = 1$

$$\therefore \quad y = x^3 x^{-2} = x$$

والآن نشتق فنحصل على :

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

ج- إذا كانت $y = u^{v}$ وان $u = f(x)$ ، $v = g(x)$ وهما دالتان تفاضليتان في x فإن مشتقة الدالة تكون كالآتي:

تكيف الدالة إلى الصيغة الآتية :

$$\ln y = v \ln u$$

ومنها نحصل على :

$$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^{v}\ln u \frac{dv}{dx}$$

لتوضيح ذلك نأخذ الأمثلة الآتية:

١- ما هي مشتقة الدالة الآتية :

$$y = x^{x^3}$$

الجواب:

$u = x$ ومنها نحصل على $\frac{du}{dx} = 1$

$v = x^3$ ومنها نحصل على : $\frac{dv}{dx} = 3x^2$

والآن نجد المشتقة وفق القاعدة (٩) أعلاه فينتج:

$$\frac{dy}{dx} = x^3\left(x^{x^3-1}\right)(1) + x^{x^3} inx\left(3x^2\right)$$

$$= x^{x^3+2} + 3x^{x^3+2} inx$$

$$x^{x^3+2}\left(1 + 3inx\right)$$

٢- جد مشتقة الدالة الآتية:

$$y = x^{3x^2-x}$$

<u>الجواب</u> :

لدينا ما يأتي:

$u = x$ إذن : $\frac{du}{dx} = 1$

و $v = 3x^2 - x$ إذن : $\frac{dv}{dx} = 6x - 1$

والآن نجد المشتقة حسب القاعدة (١٩ج) كما يأتي :

$$\frac{dy}{dx} = \left(3x^2 - x\right)\left(x^{3x^2-x-1}\right)(1) + x^{3x^2-x} inx \ (6x-1)$$

$$= 3x^{3x^2-x+1} - x^{3x^2-x} inx \ (6x-1)$$

$$= x^{3x^2-x}\left[3x - 1 + (6x-1) inx\right]$$

٣- جد مشتقة الدالة الآتية :

$$y = \frac{(x+2)^3}{\left(x^2+1\right)^2}$$

<u>الجواب :</u>

إن مشتقة الدالة y هي مشتقة حاصل ضرب دالتين ولكن لكثرة العمليات التي تتطلبها إجراءات إيجاد المشتقة بهذه الطريقة نحاول تحويلها إلى دالة لوغارتيمية ومن ثم حلها كالآتي :

$$\ln y = 3\ln(x+2) - 2\ln(x^2+1)$$

والآن نفاضل مستعينين بالقاعدة (٧) والقاعدة (٨) معاً:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{1}{x+2}\right) - 2\left(\frac{2}{x^2+1}\right)$$

والآن نضرب الطرفين ب y ينتج :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+2)^3}{(x^2+1)^2}\left(\frac{3}{x+2} - \frac{4}{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{(x+2)^3}{(x^2+1)^2}\left(\frac{3x^2+3-4x-8}{(x+2)(x^2+1)}\right)$$

$$= \frac{(x+2)^2(3x^2-4x-5)}{(x^2+1)^3}$$

<u>القاعدة (١٠)</u>: مشتقة الدوال المثلثية

مر بنا في الفصل الثاني ذكر الدوال المثلثية وهي:

الجيب (sin) والجيب تمام (cos) والظل (tan) والظل تمام (cot) والقاطع (sec)والقاطع تمام (csc) .

<u>أما مشتقة هذه الدوال فهي:</u>

إذا كانت : y= sin u وأن: u= f(x)

فإن :

أ- $\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$

وبالمثل أيضاً :

ب- $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u\left(\frac{du}{dx}\right)$

ج- $\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$

د- $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$

هـ- $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$

و- $\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$

<u>لنأخذ بعض الأمثلة:</u>

١- جد مشتقة الدالة الآتية : $y = \sin 4x$

<u>الجواب :</u>

نفاضل حسب القاعدة ١٠(أ):

حيث أن : $u = 4x$ إذن : $\frac{du}{dx} = 4$

$\frac{dy}{dx} = \cos 4x(4)$

إذن : $= 4\cos 4x$

الجزء الثاني

٢- جد المشتقة الدالة الآتية :

$$y = 2\cos 3x$$

<u>الجواب :</u>

حيث أن : $u = 3x$ إذن : $\frac{du}{dx} = 3$

والآن نفاضل حسب القاعدة ١٠(ب):

$$\frac{dy}{dx} = -2\sin 3x(3)$$

$$= -6\sin 3x$$

٣- جد مشتقة الدالة الآتية :

$$y = \sin(x^2 + 3)$$

<u>الجواب :</u>

لندع $u = x^2 + 3$ إذن : $\frac{du}{dx} = 2x$

والآن نفاضل : $\frac{dy}{dx} = \cos(x^2 + 3)(2x)$

$$= 2x\cos(x^2 + 3)$$

٤- ما هي مشتقة الدالة الآتية :

$$y = \cos x + \sec x$$

<u>الجواب:</u>

نطبق القاعدتين (١٠ب،هي)

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x(1) + \sec x \tan x(1)$$

$$= \sin x(\sec^2 x - 1)$$

وذلك لأن : $\sec x \tan x = \sin x \sec^2 x$ (راجع الفصل الثالث)

٥- جد مشتقة الدالة الآتية :

y=tan3x

الجواب :

نفترض أن u=3x: إذن : $\frac{du}{dx} = 3$

والآن : $\frac{dy}{dx} = \sec^2 3x(3)$

$$= 3\sec^2 3x$$

٦- جد مشتقة الدالة الآتية:

$$y = \frac{\sin x}{x}$$

الجواب :

واضح أن المشتقة هي مشتقة حاصل قسمة دالتين ولهذا نستعين بالقاعدة (٦) إلى القاعدة (١٠\أ)

والآن نفاضل فنحصل على :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(\cos x) - \sin x}{x^2}$$

القاعدة (١١): مشتقة الدالة العكسية Inverse Function

مشتقة معكوس أي دالة تساوي مقلوب مشتقة تلك الدالة .

فإذا كانت $y = f(x)$ و $x = g(y)$ دوال تفاضلية متعاكسة فإن:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{dg(y)}{dy}} \quad \text{أو} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

مثال :

إذا كانت $x = y + 2y^4$ أوجد : $\frac{dy}{dx}$

الجزء الثاني

لدينا : $\frac{dx}{dy} = 1 + 8y^3$

إذن : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+8y^3}$

القاعدة (١٢): مشتقة الدوال المركبة Composite Functions

إذا كانت y دالة للمتغير u وان u دالة للمتغير x لذلك فإن y هي الدالة أو دالة مركبة .

فإذا كانت $y = f(u)$ وان $u = g(x)$

أي أن :

$$y = f[g(x)] = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال:

إذا كانت $y = u^3$ وإن $u = 2x^3 + 3$

أوجد

الجواب:

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 = 3(2x^3 + 3)^2$$

و $\frac{du}{dx} = 6x^2$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 3(2x^3 + 3)^2 (6x^2)$$

$$= 72x^{11} + 216x^5 + 162x^2$$

تمارين (٣-٤)

جد مشتقة الدوال الآتية:

١- $y = -4$

٢- $y = x\sqrt{5-x}$

٣- $y = e^{-\frac{1}{x}}$

٤- $y = \dfrac{(x+3)^2}{x-1}$

٥- $y = x^2 \sin x$

٦- $y = e^{-3x}$

٧- $y = (2x)(\log x^2)$

٨- $y = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 4$

٩- $y = x^5 + 4x - 6$

١٠- $y = \dfrac{\csc x}{x}$

٤-٨ المشتقات ذات الدرجة العليا Derivatives of Higher Order

إن مشتقة $y = f(x)$ بالنسبة للمتغير x ما هي إلا دالة للمتغير x أيضاً. ومن الممكن إيجاد تفاضل هذه الدالة بالنسبة للمتغير x مرة أخرى. وتسمى مشتقة المشتقة الأولى بالمشتقة الثانية. ومشتقة هذه الدالة هي المشتقة الثالثة وهكذا.

وبشكل عام فإن المشتقة (n) للدالة $y = f(x)$ تستخرج بإيجاد (n) من التفاضلات ويرمز لها بالآتي:

$$\frac{d^n y}{dx^n} \text{ أو } d^n(x) \text{ أو } y^{(n)} \text{ أو } \frac{d^n}{dx}(y) \text{ أو } D_x^n y \text{ أو } D_x^n(y)$$

أمثلة

أوجد مشتقة الدوال التالية:

$$y = 4x^3 + 2x + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 + 2$$ (المشتقة الأولى)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 24x$$ (المشتقة الثانية)

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 24$$ (المشتقة الثالثة)

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 0$$ (المشتقة الرابعة)

وتمثل مشتقة الدالة $y = f(x)$ بالنسبة لـ (x) معدل التغير في y عندما يتغير x . أما المشتقة الثانية لـ $y = f(x)$ بالنسبة لـ x فتمثل معدل التغير في المشتقة الأولى $y' = f'(x)$ عندما يتغير x .

وبشكل عام فإن المشتقة (n) للدالة $y = f(x)$ بالنسبة لـ x تمثل معدل التغير في المشتقة (n-1) للدالة $y = f(x)$ عندما يتغير x .

وتعتبر المشتقة ذات الدرجات العليا مهمة جداً في بعض المسائل الاقتصادية والإحصائية ولكن في الحياة العملية نادراً ما تستخدم مشتقة أكثر من المشتقة الثانية.

ويستفاد من المشتقة الثانية في التمثيل البياني للدوال وكذلك للوقوف على حالة المشتقة الأولى فيما إذا كانت متزايدة أو متناقصة أو ثابتة أي درجة التسارع فيها . كما سيأتي شرحه فيما بعد.

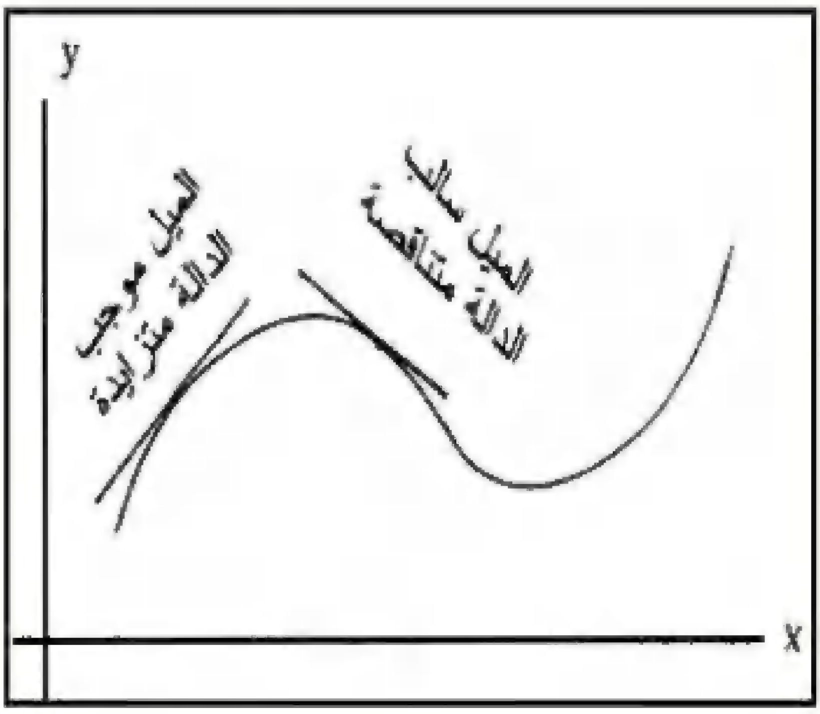
٤_٩ الدوال المتزايدة والمتناقصة
Increasing and Decreasing Function

إن مشتقة الدالة $y = f(x)$ عند النقطة x = a بالنسبة للمتغير x هي $y' = f'(x)$ وبتعبير آخر أن $f'(a)$ هي ميل المنحني $y = f(x)$ عند النقطة x = a .

<u>قاعدة :</u>

١- إذا كانت المشتقة الأولى $f'(a)$ موجبة فإن $y = f(x)$ هي <u>دالة متزايدة</u> للمتغير x عند x = a . وهذا يعني أن y تتزايد بتزايد قيمة x بعد النقطة x = a .

٢- أما إذا كانت المشتقة الأولى $f'(a)$ سالبة فإن : $y = f(x)$ هي دالة متناقصة للمتغير x عندما x = a أي أن y تتناقص عندما تتزايد x بعد النقطة x = a . كما مبين في الشكل (4-10).



شكل رقم (٤-١٠)

الجزء الثاني

أمثلة

١- إذا كانت لدينا الدالة التالية: $y = 3x^2 + 4$ فإن: $f'(x) = \frac{dy}{dx} = 6x$

فإذا كانت $x > 0$ فإن $f'(x) > 0$ (أي موجبة) فالدالة عند هذه النقطة دالة متزايدة.

أما إذا كانت $x < 0$ فإن $f'(x) < 0$ (أي سالبة) فالدالة عند هذه النقطة دالة متناقصة .

٢- حدد النقاط التي تكون عندها الدالة التالية متزايدة أو متناقصة :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 8$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

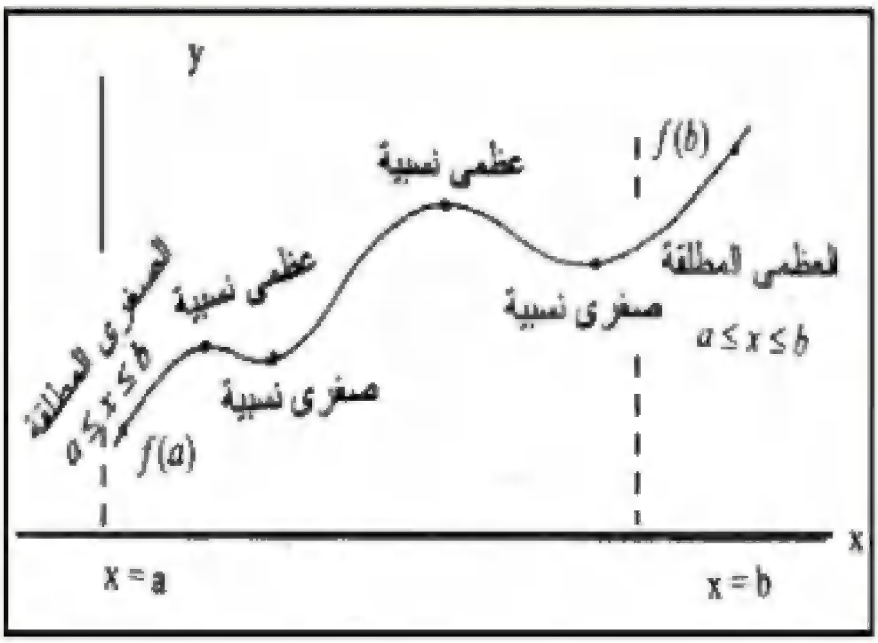
وواضح أن $\frac{dy}{dx} > 0$ إذا كانت $x > 0$ أو $x < -2$ وعند ذلك تكون الدالة متزايدة وتكون $\frac{dy}{dx} < 0$ إذا كانت $-2 < x < 0$ وعند ذلك تكون الدالة متناقصة .

٤-١٠ النهايات العظمى والصغرى النسبية
Relative Maxima and Minima

تكون الدالة $y = f(x)$ في نهاياتها العظمى نسبياً تسمى أحياناً بالنهايات العظمى موقعياً (محليا") (local maximum) عند x = a. إذا كانت قيمة f (a) هي أعظم من أية قيمة للدالة f (x) بالنسبة ل x في فاصلة المسافة المجاورة ل a .

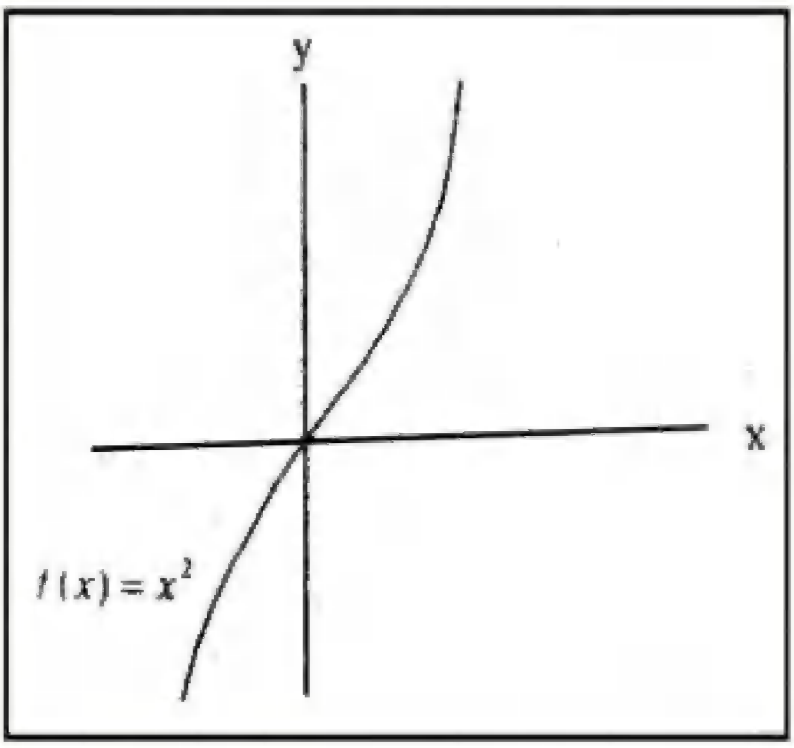
وبنفس الطريقة تسمى الدالة $y = f(x)$ الأصغر نسبياً أو الأصغر موقعياً (محليا") (local minimum) عند x = a . إذا كانت قيمة f (a) هي اصغر من أية قيمة للدالة f (x) بالنسبة لـx في فاصلة المسافة المجاورة ل a .

إن القيمة العظمى والصغرى النسبية أعلاه تتحدد عادة في فاصلة مسافة معينة تعطينا أما القيمة العظمى أو الصغرى المطلقة فتظهر عند نقطة تقع في نهاية فاصلة المسافة الطويلة . كما انه من الممكن أن تكون نهاية عظمى نسبية للدالة اصغر من نهاية صغرى نسبية للدالة كما في الشكل (4-11).



شكل رقم (٤-١١)

لنأخذ شكلاً بيانياً يوضح لنا هذه الشروحات وليكن الشكل (4-12).



شكل رقم (٤-١٢)

إذا لاحظنا الشكل (4-12) وكانت لدينا f (x) وعند x = a وكون الدالتين f (x) و $f(x)$ مستمرتان، نلاحظ ما يأتي: إذا كانت f(a) نهاية عظمى نسبياً للدالة f (x) فإن ميل f (x) أي $f'(x)$ يتغير من الموجب إلى السالب عندما تمر x من النقطة x = a.

وبالمثل إذا كانت f (a) نهاية صغرى نسبياً للدالة f (x) فإن ميل f (x) أي $f'(x)$ يتغير من السالب إلى موجب عندما تمر x من النقطة x = a .

وبتعبير جبري فإن الدالة المتزايدة ذات ميل موجب على عكس الدالة المتناقصة حيث يكون ميلها سالباً.

ولأجل تحديد قيم النهاية العظمى والصغرى النسبية للدالة y = f (x) نتبع الخطوات التالية:

١- نستخرج قيمة $\frac{dy}{dx}$ أي $f'(x)$ ونجعل قيمتها = 0 .

٢- نجد قيمها المتطرفة (أي جذورها) .

٣- نحدد عند القيمة (a) فيما إذا كانت $f'(x)$ تغير إشارتها من/إلى (+،-) عندما تزداد قيمة x مارة ب(a) وكما يلي :

أ- إذا تغيرت قيمة $f'(x)$ من (+) إلى (-) عندما x = a فهذا يعني نهاية عظمى نسبية عند x=a .

ب- إذا تغيرت قيمة $f'(x)$ من(-) إلى(+) عندما x = a فهذا يعني نهاية صغرى نسبية عند x = a .

ج- إذا لم تغير قيمة $f'(x)$ من إشارتها عندما x = a فهذا يعني لا نهاية عظمى أو صغرى نسبية عند x = a .

إن هذا الأسلوب يستخدم فيما إذا كانت الدالتان f(x)، $f'(x)$ مستمرتان ،أما إذا كانتا غير مستمرتين فهذا ما سنوضحه لاحقاً .

أمثلة

جد النهاية العظمى والصغرى النسبية للدالة التالية:

$$y = 4x^3 + 4x^2 - 4x + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 + 8x - 4$$

فإذا كانت $12x^2 + 8x - 4 = 0$ (وبالقسمة على 4) ينتج :

$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$(3x - 1)(x + 1) = 0$$

وهذا يعطينا إما : $x = \frac{1}{3}$ أو $x = -1$

والآن :

إذا كانت : $-1 < x < \frac{1}{3}$ فإن : $\frac{dy}{dx} < 0$

وإذا كانت : $x > \frac{1}{3}$ فإن $\frac{dy}{dx} > 0$:

إذن تغيرت قيمة $f'(x)$ من (-) إلى (+) عند $x = a = \frac{1}{3}$ وهذا يعني نهاية صغرى عند

$$x = \frac{1}{3}$$

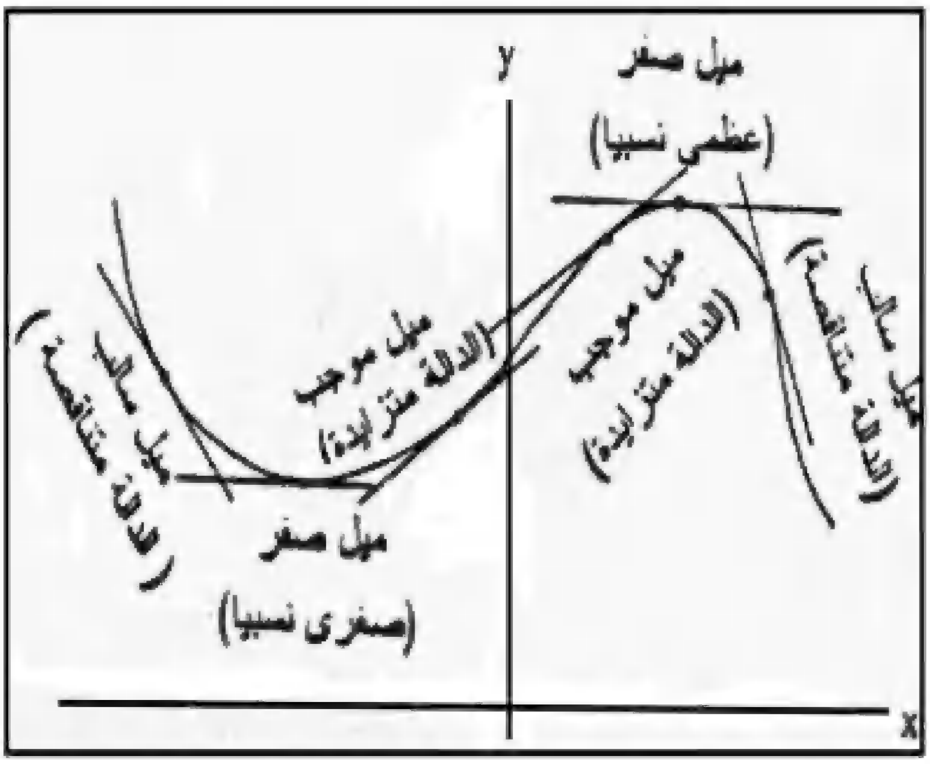
والآن لنأخذ الحالة الأخرى:

أما إذا كانت $x < -1$: فإن : $\frac{dy}{dx} > 0$

أما إذا كانت : $-1 < x < \frac{1}{3}$ فإن : $\frac{dy}{dx} < 0$

فهذا يعني تغير قيمة $f'(x)$ من الموجب إلى السالب إذن هناك كفاية عظمى عند $x = -1$

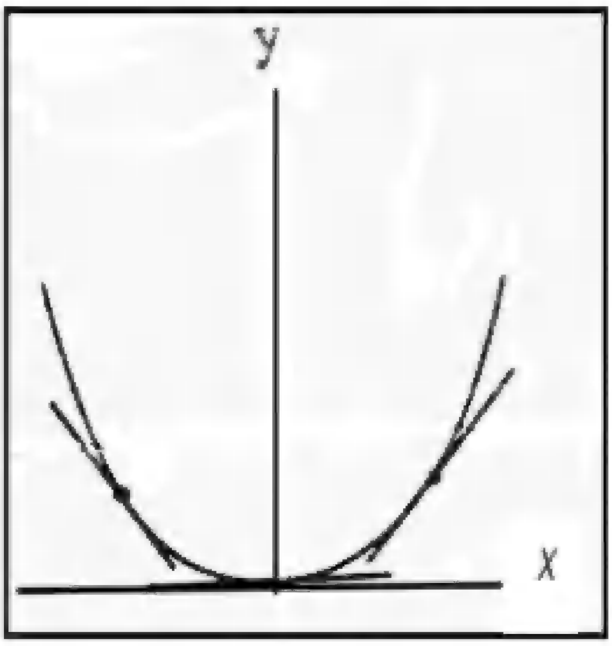
كما في الشكل رقم (4-13)



شكل رقم (٤-١٣)

٤_١١ التقعر والتحدب Concave and Convex

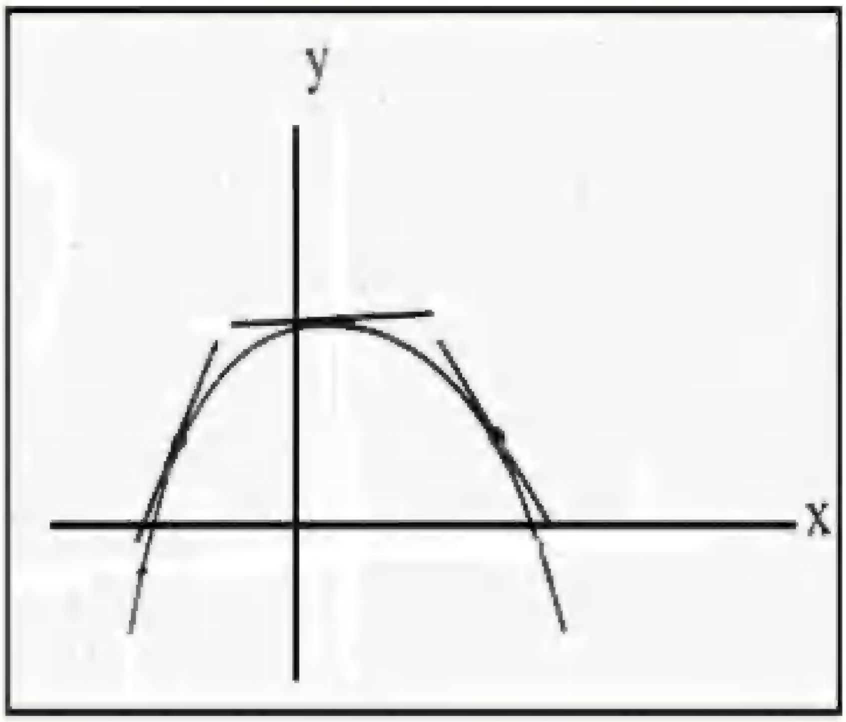
إذا أخذنا الدالة $y = x^2 - 2$ وحاولنا أن نرسمها نحصل على شكل رقم(4- 14a) :



شكل رقم(٤-١٤a) المنحنى المقعر

ويلاحظ على هذا المنحنى أن المماس المرسوم لمنحنى هذه الدالة من أية نقطة عليه يقع تحت المنحنى . ولهذا يسمى هذا المنحنى بالمنحنى المقعر (concave).

وبالمثل إذا أخذنا الدالة الآتية $y = 3 - x^2$ فإن منحنى هذه الدالة يظهر بشكل مغاير للمنحنى المقعر حيث إن المماس المرسوم من أية نقطة عليه يقع فوق المنحنى وفي هذه الحالة يسمي المنحنى من هذا النوع بالمنحنى المحدب (convex) كما في الشكل رقم (4- 14b)



شكل رقم (٤-١٤b) منحنى محدب

فإذا أخذنا الدالة y =f(x) عند النقطة x = a فإن المشتقة الثانية لهذه الدالة إلى $y'' = f''(x)$ وهي ميل المنحنى $y' = f'(x)$ للدالة f(x) وعليه يلاحظ ما يلي:

١- إذا كانت المشتقة الثانية $f''(a)$ موجبة تكون $y' = f'(x)$ دالة متزايدة للمتغير x عند x = a وحينذاك يكون المنحنى y =f(x) مقعراً كما في الشكل رقم (4- 14a).

٢- أما إذا كانت قيمة المشتقة $f''(a)$ سالبة تكون $y' = f'(x)$ دالة متناقصة للمتغير x عند x = a وحينذاك يكون المنحني y =f(x) محدب كما في الشكل رقم (4- 14b).

ومن ذلك نستنتج :

١- إذا كانت $f'(a) = 0$ و f(x) دالة محدبة عند x = a فإن للدالة f(x) نهاية عظمى عند النقطة a .

٢- إذا كانت $f'(a) = 0$ و f(x) دالة مقعرة عند x = a فإن للدالة f(x) نهاية صغرى عند النقطة a.

مما سبق يمكن أن نخلص إلى الأسلوب التالي لاختيار النهاية العظمى والصغرى النسبية :

١- إذا كانت :

(أ) $f'(x)$ و $f(x)$ دالتان مستمرتان عند x = a

(ب) $f'(a) = 0$

٢- وإذا كانت فإن :

(أ) $f''(a) > 0$ فهناك نهاية صغرى نسبية عند x = a .

(ب) $f''(a) < 0$ فهناك نهاية عظمى نسبية عند x = a .

(ج) $f''(a) = 0$ الاختبار لا يمكن تطبيقه .

٤_١٢ نقطة الانقلاب Point of Inflection

تحدث نقطة الانقلاب في الدالة y = f(x) عند نقطة ما يتغير فيها انحناء المنحنى. وما دامت إشارة المشتقة الثانية تشير إلى حالة انحناء المنحني فإن ذلك يؤشر أيضاً نقطة الانقلاب ومن ذلك نستخلص القاعدة التالية:

١- إذا تغيرت إشارة $f'(x)$ عند النقطة x =a تكون لدينا نقطة انقلاب عند x= a.

٢- إذا لم تتغير إشارة $f'(x)$ عند النقطة x =a فليست لدينا نقطة انقلاب عند : x= a

وبأسلوب آخر يمكن تلخيص كيفية تحديد النهايتين العظمى أو الصغرى ونقطة الانقلاب - حسبما يأتي:

١- إذا كانت $\frac{dy}{dx} = 0$ فإن y تكون في نهايتها العظمى أو الصغرى أو عند نقطة الانقلاب.

٢- إذا كانت $\frac{dy}{dx} = 0$ و $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ فحينئذ تكون y عند نهاية صغرى نسبية .

٣- إذا كانت $\frac{dy}{dx} = 0$ و $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ فحينئذ تكون y عند نهاية عظمى نسبية .

٤- إذا كانت $\frac{dy}{dx} = 0$ و $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ فحينئذ تكون y عند نقطة الانقلاب.

مثال (١):

حدد النهاية العظمى و الصغرى ومنطقتي التقعر والتحدب ونقطة الانقلاب في الدالة الآتية :

$$y = 4 + 3x - x^3$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 3 - 3x^2$$

لنجعل $3 - 3x^2 = 0$ (أي ميل المنحنى =0)

وبحل هذه المعادلة نحصل على: $x = -1$ و $x = 1$

وعند تعويض قيمتي x في $\frac{d^2y}{dx^2}$ نحصل على :

أ- عندما تكون x=1 فإن :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -6x = -6(1) = -6$$

أي أن : $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

فحينئذ تكون y عند النهاية العظمى وذلك عند النقطة (1,6)

حيث أن : $y = 4 + 3(1) - (1)^3 = 6$

ب- عندما تكون $x = -1$ فإن

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -6(-1) = 6$$

أي أن : $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

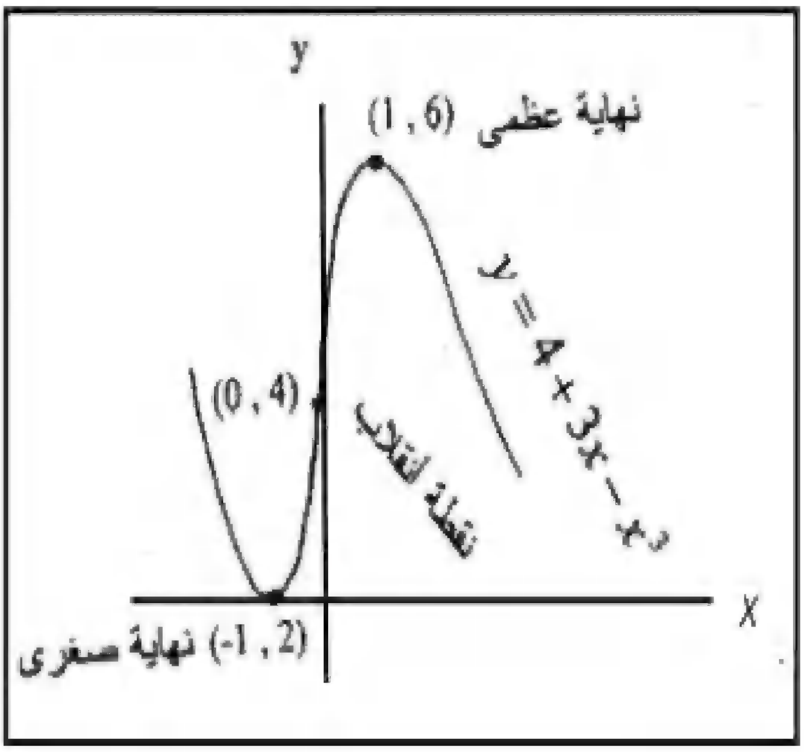
فعندئـــذ تكـــون y عنـــد النهايـــة الـــصغرى ,وذلـــك عنـــد النقطـــة(1,2-) حيـــث أن :

$y = 4 + 3(-1) - (-1)^3 = 2$ عندما : $x = -1$

كـــما يلاحـــظ أيـــضاً : عنـــدما تكـــون $x<-1$, فـــإن : $\frac{dy}{dx} < 0$ إذن : الدالـــة في

حالة تناقص.

وإذا كانت $-1 < x < 1$ فإن : $\frac{dy}{dx} > 0$. إذن :الدالة في حالة تزايد. كما في الشكل (4-15) .



شكل رقم (١٥-٤)

ج-أما بالنسبة للتقعر أو التحدب فيلاحظ بأن :

أ- $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ إذا كانت $x = 0$.

ب- $\frac{dy^2}{dx^2} > 0$ إذا كانت x < 0 (تقعر) .

ج- $\frac{dy^2}{dx^2} < 0$ إذا كانت x > 0 (تحدب) .

د- أما نقطة الانقلاب فتكون عندما:

$\frac{dy}{dx} = 0$ و $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ وهذا لا يتحقق إلا إذا كانت x = 0 وعندها تكون:

$$y = 4 + 3(0) - (0)^3 = 4$$

أي أن نقطة الانقلاب تكون عند النقطة (0,4) لأن عند $x = 0$ تغير $f''(x)$ إشارتها كما مبين في الشكل رقم (4-15) أعلاه.

مثال (٢):

جد (أن وجدت) نقاط الانقلاب ومناطق التقعر أو التحدب والنهايات العظمى والصغرى للدالة: $y = x^3 - 3x^2$

الحل:

١- نستخرج :

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x - 2) = 0$$

من ذلك نحصل على إما:

3x = 0 إذن x = 0

أو x - 2 = 0 إذن x = 2

وهذه نقاط حرجة ينبغي البحث عنها .

٢- نستخرج : $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6$

ونعوض قيم x أعلاه في الدالة $\frac{d^2y}{dx^2}$ لنحصل على :

إذا كانت x = 0 فإن : $f'' = 6x - 6 = 6(0) - 6 = -6 < 0$

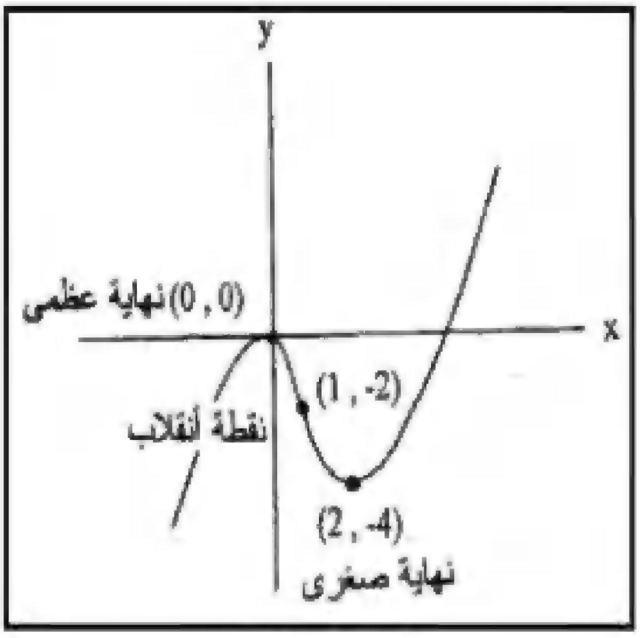
وهنا تكون y عند نهايتها العظمى عند x = 0 أي عند النقطة (0,0) لأن $y = (0)^3 - 3(0)^2$ وإذا كانت x = 2 فإن: $f'' = 6x - 6 = 6 > 0$ وهنا تكون y عند نهايتها الصغرى عند x = 2 أي عند النقطة (2,-4) لان :

$$y = (2)^3 - 3(2)^2 = -4$$

٣- وعندما تكون $\frac{dy}{dx} = 0, \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6 = 0$

أي أن 6x-6=0 وبحل هذه المعادلة نحصل على : x = 1 وعندما x = 1 تكون هناك نقطة انقلاب وذلك عند النقطة (1,-2) لأن : $y = (1)^3 - 3(1)^2 = -2$.

٤- عند نقطة الانقلاب كما مبين في (٣) أعلاه تكون $f''(x)$ موجبة إذا كانت x>1 وهنا تكون الدالة $f(x)$ في منطقة تقعر وتكون $f''(x)$ سالبة إذا كانت x<1 وهنا تكون $f(x)$ في منطقة تحدب كما مبين في الشكل رقم (4-16).



شكل رقم (١٦-٤)

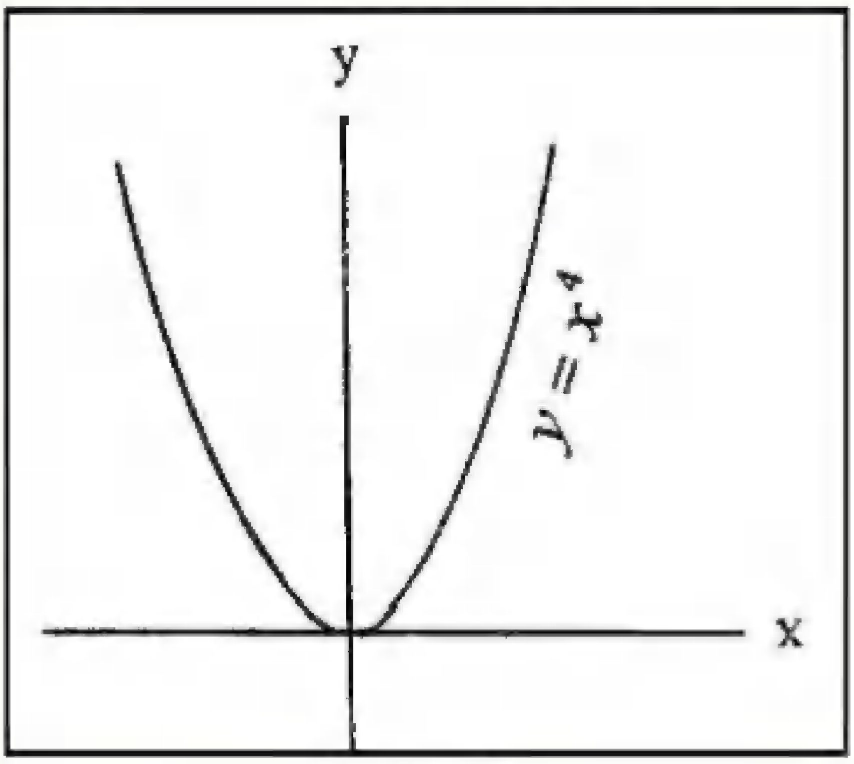
٤_١٣ حالات معينة في نقاط الانقلاب والنهاية العظمى والصغرى

قلنا في الفقرة السابقة انه عندما تكون : $\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$

عند نقطة معينة فإن هذه النقطة هي نقطة انقلاب في المنحني وهذه القاعدة صحيحة في غالبية الحالات ولكن في حالات أخرى غير صحيحة لنأخذ المثال التالي:

$$y = x^4$$

فإذا رسمنا المنحني بالطريقة الاعتيادية نحصل على ما يأتي شكل رقم (4-17) :



شكل رقم (٤-١٧)

ويلاحظ أن (y) تمر في نهاية صغرى عندما x = 0 وعند تطبيق القياسات الواردة في الفقرة (4-12) نحصل على $\frac{\partial y}{\partial x} = 4x^3 = 0$ عندما x = 0 ولكن $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 = 0$ عندما x = 0 أيضا و إذا ما استمرت عملية التفاضل:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 24x, \frac{d^4y}{dx^4} = 24, \frac{d^5y}{dx^5} = 0$$

وهذه التفاضلات تعطينا شروطاً إضافية من اجل تحديد النهاية العظمى والنهاية الصغرى وذلك كما يأتي :-

١- جد المشتقات بالتوالي للدالة حتى تتلاشى (أي تساوي صفر) بافتراض $x = 0$.

٢- حدد المشتقة ما قبل الأخيرة (أي المشتقة ما قبل المشتقة المتلاشية).

٣- فإذا كانت هذه الدالة :

أ- بترتيب زوجي $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^4y}{dx^4}, \frac{d^6y}{dx^6}$ ... الخ

وكانت قيمتها :-

- سالبة فهذا يعني نهاية عظمى عند $x = 0$.

- موجبة هذا يعني نهاية صغرى عند $x = 0$.

ب- بترتيب فردي فإن $x = 0$ هي نقطة انقلاب وعند متابعة المثال أعلاه نجد أن المشتقة ما قبل الأخيرة هي:

$\frac{d^4y}{dx^4} = 24$ أي أن: $\frac{d^4y}{dx^4} > 0$ (موجبة) .

فهنا تكون y في نهايتها الصغرى عند $x = 0$.

<u>مثـال (٢):</u>

جد (إن وجدت) النهاية العظمى والصغرى ونقطة الانقلاب في الدالة الآتية:

$$y = x^3 - 6$$

<u>الحل:</u>

خذ المعادلة $y = x^3 - 6$

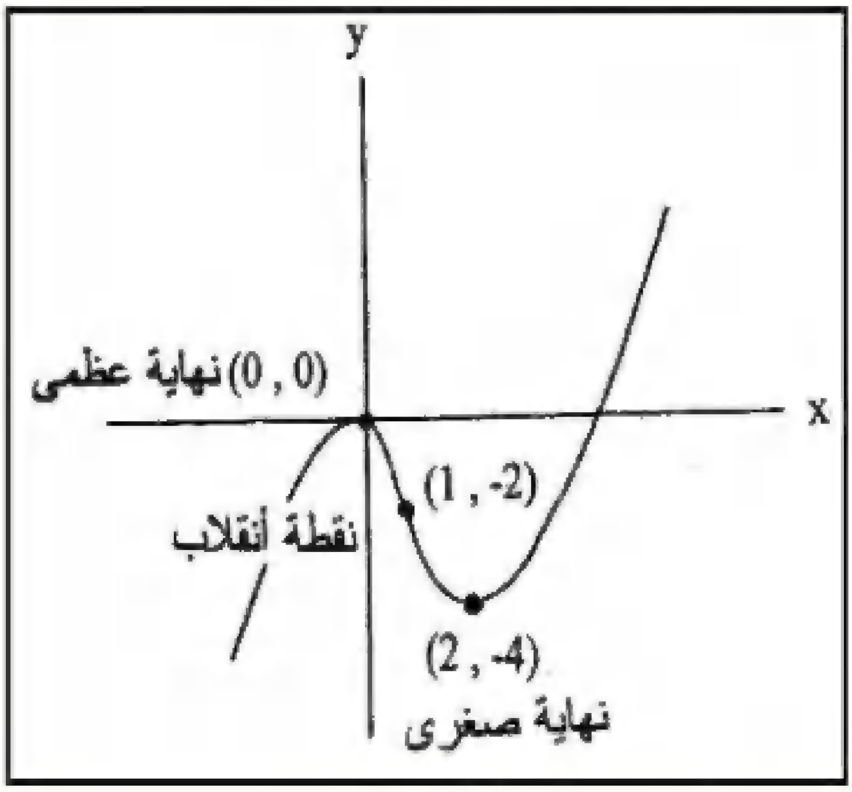
١- نجد المشتقة $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ ومن ثم المشتقة الثانية $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$ وعند حل المعادلة $3x^2 = 0$

نحصل على $x = 0$ وبتعويض ذلك في $\frac{d^2y}{dx^2} = 6(0) = 0$ ومن ذلك يظهر أن $f' = f'' = 0$

٢- وهنا وحسب القياسات الواردة في (٤-١٢) فإن هناك نقطة انقلاب عند x=0 وليس هناك نهاية عظمى أو صغرى ولكن قد لا يكون هذا صحيحا ولهذا نذهب إلى تطبيق القياسات الواردة في (٤-١٣) وكما يأتي :

- نجد المشتقات : $\frac{d^4y}{dx^4}=0, \frac{d^3y}{dx^3}=6$

- يلاحظ أن المشتقة ما قبل الأخير : $\frac{d^3y}{dx^3}$ هي فردية الترتيب لذلك فإن هناك نقطة انقلاب عند x = 0 أي عند النقطة (0،-6) كما مبين في الشكل رقم (4-18).



شكل رقم (٤-١٨)

تمارين (٤-٤)

جد النهاية الصغرى أو العظمى (أن وجدت) ونقطة الانقلاب للدوال الآتية :

١- $y=5+10x-2x^2$

٢- $y=3x^2-5x+4$

٣- $y=x\sqrt{1-x^2}$

٤- $y = 12 - 8x + x^4$

٥- $y = x^6 + 9 - x$

٦- $y = \frac{1}{9 - x^2}$

٤-١٤ التفاضل في الدوال ذات الأكثر من متغير
Differential for functions of more than one variables

٤-١٤-١- الدالة ذات المتغيرات العديدة

في الفقرات السابقة كنا نتعامل مع الدوال التي تبين العلاقة بين متغيرين أي العلاقات التي فيها متغير مستقل واحد وآخر معتمد ولكن في الحياة العملية وفي الحالات والظواهر الاقتصادية غالباً ما نجد أن الكميات والمتغيرات تعتمد على أكثر من متغير مستقل. وما يقوم منها على متغير واحد فهو يشكل علاقة بسيطة قد لا تلبي متطلبات تحديد قيمة المتغير المعتمد.

وتكتب الدالة ذات المتغيرين كالآتي : -

$y = f(x,z)$ حيث تتحدد قيمة y وتبعاً للتغيرات التي تحدث في كل من (x,z)

<u>مثـال :</u>

الدالة $y = 2x - xz + 3z$ والتي يمكن أن تلخص بالشكل الآتي :-

$$y = f(x,z)$$

ويمكن حلها إذا افترضنا قيمة $x = 3 , z = 2$ لنحصل على :

$$y = 2(3) - (3)(2) + 3(2)$$

$$y = 6$$

ويمكن أن يزداد عدد المتغيرات المستقلة ليكون أكثر من متغيرين وبذلك تكتب بالصيغة التالية :

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

٢-١٤-٤-التفاضل الجزئي Partial Differentiation

أ) المشتقة الجزئية:

إذا كانت لدينا المعادلة التالية:

$$y = f(x,z)$$

وأبقيت قيمته z ثابتة (أي تعامل معاملة المقدار الثابت) فإن الدالة y تكون دالة لمتغير واحد هو x وإن مشتقتها بهذه الحالة تسمى المشتقة الجزئية ل y بالنسبة للمتغير x ويرمز لها بالآتي:

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ او } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ أو } \frac{\partial}{\partial x} f(x,z) \text{ أو } fx(x,z) \text{ أو } f_x \text{ أو } y_x$$

وبنفس الأسلوب إذا بقيت x ثابتة فإن المشتقة الجزئية للدالة بالنسبة للمتغير z تكون كالآتي:

$$\frac{\partial y}{\partial z} \text{ او } \frac{\partial f}{\partial z} \text{ أو } \frac{\partial}{\partial z} f(x,z) \text{ أو } f_z(x,z) \text{ أو } f_z \text{ أو } y_z$$

أمثلة

جد مشتقة الدوال التالية :

مثال (١):

$$y = 3x^2 + 2xz + 2z^3$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 6x + 2z$$ (تعامل z كثابت)

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 2x + 6z^2$$ (تعامل x كثابت)

مثال (٢):

$$y = x^2 z + \log x$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2zx + \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = x^2$$

ب) المشتقة الجزئية الثانية The Second Partial Derivative

ما دامت المشتقة الجزئية للدالة $y = f(x,z)$ هي دالة للمتغيرين x,z ولهذا يمكن إجراء التفاضل بالنسبة لأي منهما ويرمز إلى ذلك بالآتي :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \text{ أو } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \text{ أو } y_{xx} \text{ أو } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ أو } f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{dz}\right) \text{ أو } \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} \text{ أو } y_{zx} \text{ او } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \text{ او } f_{zx}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dy}{\partial x}\right) \text{ أو } \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x} \text{ أو } y_{xz} \text{ او } \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \text{ او } f_{xz}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) \text{ أو } \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \text{ أو } y_{zz} \text{ او } \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \text{ او } f_{zz}$$

ومن هذه المشتقات الأربع يمكن تناول ثلاث فقط ما دامت $f_{xz} = f_{zx}$ لكل قيم x,y بحيث تكون f_{xz}, f_{zx} دوال مستمرة.ولهذا يمكن أجراء التفاضلات طبقاً لهذه الخاصية بأي ترتيب نراه مناسباً بشرط واحد ألا وهو ملاحظة استمرارية هذه المشتقات .

مثال (١):

جد التفاضل الجزئي في الدالة التالية :

$$y = 2x^2 - 3xz + 4z^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4x - 3z$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 4$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -3x + 8z$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 8$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = -3$$

<u>مثـال (٢):</u>

أوجد التفاضل الجزئي للدالة التالية :

$$y = f(x,z) = x^4 - 4x^3 z + 8xz^3 - z^4$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4x^3 - 12x^2 z + 8z^3$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -4x^3 + 24xz^2 - 4z^3$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 12x^2 - 24xz$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 48xz - 12z^2$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} = -12x^2 + 24z^2$$

٣- ١٤-٤-التفاضل الكلي The Total Differential

إن التفاضل الكلي للدالة $y = f(x,z,w)$ هو أن:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial z}dz + \frac{\partial y}{\partial w}dw$$

ويطلق على الحدود : $\frac{\partial y}{\partial x}dx, \frac{\partial y}{\partial z}dz, \frac{\partial y}{\partial w}dw$ بالتفاضلات الجزئية للدالة y وبالنسبة للمتغيرات x,z,w على التوالي وان مجموع تفاضلات الدالة ما هي إلا التفاضل الكلي وبصورة عامة فإن التفاضل الكلي للدالة : $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ هو مجموع كل تفاضلاتها الجزئية :

$$dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

<u>مثـال (١) :</u>

جد التفاضل الكلي لدالة التالية :

$$y = x^2 + 2z - 3w^2$$

<u>الجواب :</u>

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial z}dz + \frac{\partial y}{\partial w}dw \\ &= 2xdx + 2dz - 6wdw \end{aligned}$$

<u>مثـال (٢) :</u>

أوجد dy في الدالة y = xz2w3

<u>الجـواب:</u>

$$dy = z^2w^3dx + 2xzw^3dz + 3xz^2w^2dw$$

٤-١٤-٤- المشتقة الكلية The Total Derivative

إذا كانت المشتقات الجزئية المستمرة للدالة $y = f(x, z, w)$ هي :

$\frac{\partial y}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial x}$ وكانت x,z,w دوال لمتغير أخر مثل u فإن :

$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}$ وتسمى $\frac{\partial y}{\partial u}$ بالمشتقة الكلية للمتغير وبالنسبة للمتغير u .

وبنفس الطريقة إذا أخذنا الدالة : $y = f(x, z, w)$ وفيها x,z,w دوال تفاضلية للمتغيرين u,v

فإن كلاً من : $\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$ تستخرج بالطريقة التالية:

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}$$

وبصورة عامة إذا كانت لدينا الدالة التفاضلية التالية :

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

وكانت المتغيرات x دوال تفاضلية لمجموعة أخرى من المتغيرات مثل $w_1, w_2, ..., w_n$. لذلك فإن

المشتقة الجزئية للمتغير y بالنسبة لأي من المتغيرات في المجموعة الثانية (w_i) تحسب بالطريقة التالية:

$$\frac{\partial y}{\partial w_i} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial w_i} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial w_i} + ... + \frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial w_i}$$

مثال (١):

إذا كانت لدينا الدالة الآتية :

$$y = 2xw - zw - 4xz^2$$

وكانت: $w=8v,\ z=2v^2,\ x=2v$

جد المشتقة الكلية $\frac{\partial y}{\partial v}$

الجواب:

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}$$

$$= (2w - 4z^2)^2(2) + (-w - 8xz)(4v) + (2x - z)(8)$$

مثال (٢):

جد المشتقة الكلية للدالة الآتية:

$$y = x^2 + 2xz + 2z$$

إذا كانت: $z=-2v$ ، $x=v^2$

الجواب:

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$= (2x + 2z)2v - 2(2x + 2)$$

مثال (٣):

جد المشتقة الكلية للدالة الآتية:

$$y = 2x^2 + xz + z^2$$

إذا كانت: $z=3x$

الجواب:

في هذه الحالة مادامت $y=f(x,z)$ ، $z=f(x)$ فإن المشتقة الكلية تستخرج كحالة خاصة للقاعدة العامة للمشتقة الكلية وكالآتي:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= (4x + z) + (x + 2z)(3)$$

$$= 7(x + z)$$

٥-١٤-٤-تفاضل الدالة الضمنية Differentiation of Implicit Function

عندما نكتب الدالة $y = f(x)$ أو $x = f(y)$ فإن هاتين الدالتين هي دالتان صريحتان أي أن y هو دالة صريحة لـ x في الأولى و x دالة صريحة لـ y في الثانية. وفي الدوال الصريحة يسهل إيجاد $\frac{dx}{dy}$ أو $\frac{dy}{dx}$.

ولكن في بعض الأحيان تكتب العلاقة بين x, y بالصيغة الآتية: $f(x,y)=0$ وهذه الصيغة تعني الدالة الضمنية لكل من x, y . وعندما نريد إيجاد $\frac{dy}{dx}$ أو $\frac{dx}{dy}$ مباشرة من دون أن نعيد صياغة المعادلة بحيث يكون احد المتغيرات دالة صريحة للأخر فإن ذلك يمكن أن يكون كالأتي:

إذا كانت $u=f(x,y)$

مع الاحتفاظ بالذهن بأن $u=0$ فإن:

$$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

وبما أن $u=0$ فإن $du=0$ ومن ذلك نحصل على:

$$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

ويظهر أن التفاضل الضمني مساوٍ لإيجاد سالب النسبة بين التفاضل الجزئي للدالة، ونفس الصيغة تستخدم لاستخراج قيمة المشتقة الجزئية للدوال الضمنية لأي عدد من المتغيرات.

مثال (١):

أوجد للدالة الآتية:

$$x^3+y^2-3x+6y+2=0$$

الجواب:

نعيد كتابة المعادلة بحيث:

$$u=x^3+y^2-3x+6y+2$$

نستخرج المشتقتين الجزئيتين:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3 \text{ ،} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 6$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 - 3}{2y + 6}$$

مثال (٢):

جد $\frac{dz}{dx}$ ، $\frac{dz}{dy}$ للدالة الآتية:

$$u = f(x, y, z) = z^2 + xz - y^2 - 3$$

الجواب:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z + x$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = -\frac{z}{2z + x}$$

وبالمثل فإن :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\therefore \frac{dz}{dy} = -\frac{-2y}{2z + x}$$

تمارين (٥-٤)

١- إذا كانت $z = x^2 + y^2 + L^3$ جد dz .

٢- إذا كانت : $y = 2x^3 + 5xz - z^2$

جد : $\frac{\partial y}{\partial x}$ ، $\frac{\partial y}{\partial z}$

٣- إذا كانت : $y = 5z^2 + 2x^2 - 4xz$

جد التفاضلات الجزئية : $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial xy}$

٤- جد التفاضل الكلي للدالة الآتية :

$$y = x^3 + 2w + 3z^2$$

٥- جد المشتقة الكلية للدالة الآتية :

$$y = 4x^2z + 2z^2w + 4wx$$

إذا كانت : $x = 3k, z = 5k^2, w = 2k$

٦- جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة الآتية :

$$y^3 + 2x^2 - 4 - 4x = 0$$

٦-١٤-٤-الدالة المتجانسة الخطية Linear Homogenous Function

إذا كانت للدالة: $u = f(x, y)$ الخاصية التالية:

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ ، حيث أن λ أي مقدار ثابت فإن الدالة u تسمى دالة متجانسة من الدرجة n، وإذا كانت n>0 فإن الدالة تسمى متجانسة تجانساً موجباً.

أما إذا كانت n=1 فإن الدالة تسمى متجانسة خطية وإذا كانت متجانسة تجانساً موجباً من الدرجة n، وكانت المشتقة الجزئية الأولى لهذه الدالة موجودة فإن :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = nf(x, y)$$

وتسمى العلاقة الأخيرة بمبرهنة أويلر (**Euler's Theorem**)

لنتناول مثالاً إيضاحياً:

<u>مثال:</u>

حدد فيما إذا كانت الدالة التالية متجانسة وما هي درجتها؟

$$u = f(x, y) = 3x^3 + 5xy^2 + y^3$$

الجواب:

حيث أن:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 9x^2 + 5y^2, \frac{\partial u}{\partial y} = 10xy + 3y^2$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = 3\lambda^3 x^3 + 5\lambda x \lambda^2 y^2 + \lambda^3 y^3$$

$$= \lambda^3 (3x^3 + 5xy^2 + y^3)$$

$$= \lambda^3 (x, y)$$

إذن الدالة متجانسة من الدرجة الثالثة ويمكن استخدام مبرهنة أويلر للوصول إلى نفس النتيجة.

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = nf(x, y)$$

والآن:

$$\therefore x(9x^2 + 5y^2) + y(10xy + 3y^2)$$

$$= 9x^3 + 15xy^2 + 3y^3$$

$$= 3(3x^3 + 5xy^2 + y^3)$$

$$= 3f(x, y)$$

إذن الدالة متجانسة من الدرجة الثالثة.

٧-١٤-٤-النهايات العظمى في الدوال ذات المتغيرين

The Maximum of the Functions of Tow Variables

تكون للدالة $f(x,z)$ قيمة عظمى نسبية أو قيمة صغرى نسبية عند $x = a$ ، $z = b$ إذا كانت $f(a,b)$ اكبر (أو اقل) من $f(x,z)$ لكل قيم x,z القريبة من $x = a$، $z = b$.

وإذا كانت للدالة $f(x,z)$ قيمة عظمى (أو صغرى) عند $x = a , z = b$ فيتبع ذلك أن تكون للدالة $f(x,b)$ قيمة عظمى (أو صغرى) عند $x= a$ وكذلك تكون للدالة $f(a,z)$ قيمة عظمى أو صغرى عند $z = b$ لذلك: تكون الدالة $f(x,z)$ في نهايتها العظمى (أو الصغرى) عند $x = a ,z = b$ عندما تتوفر الشروط الآتية وهي الشروط الضرورية للنقطة الحرجة : -

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

فإذا كانت :

١) الشروط الضرورية للنقطة الحرجة أن تكون :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

٢) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} > 0 \Leftarrow$

- نهاية عظمى إذا : $0 > \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} < 0$
- نهاية صغرى إذا : $0 < \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} > 0$

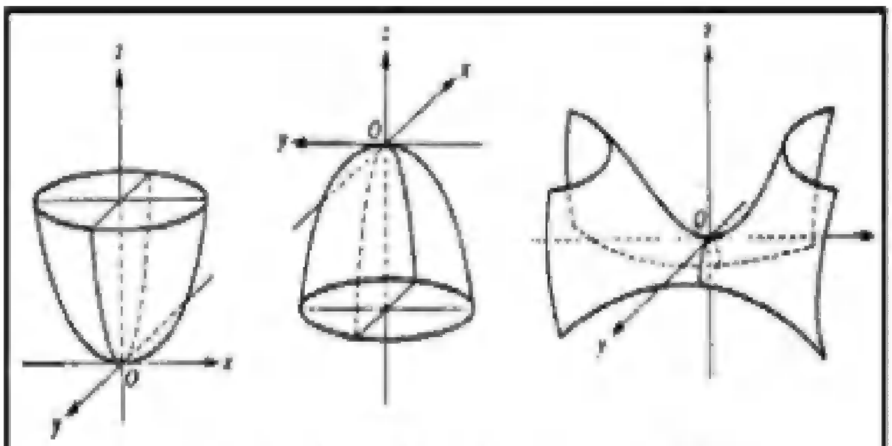
٣) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} < 0 \Leftarrow$ نقطة سرج

٤) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0 \Leftarrow$ الاختبار فاشل ويلزم البحث عن الدالة قرب النقطة الحرجة.

إن الأسلوب أعلاه يستخدم لتحديد النهاية العظمى والصغرى النسبية، ولأجل تحديد النهاية العظمى أو الصغرى المطلقة (الشاملة) (**global**) يلزم تحديد كل قيم الدالة

عند نهايات مداها. ويستخدم نفس الأسلوب الذي تم استعراضه لهذا الغرض في الدالة ذات المتغير الواحد.راجع الفقرة (٤-١٠)

والشكل رقم (4-18) يوضح لنا الدوال التي لها نهاية عظمى وصغرى ونقطة سرج.



شكل رقم (4-19)

<u>مثـال:</u>

حدد النهاية العظمى والصغرى ونقطة السرج في الدالة التالية:

$$y = f(x, y) = x^2 + 2xz$$

<u>الجواب:</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2x$$

لكي يتحقق الشرط الضروري للنقطة الحرجة لابد من:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

إذن تكون: $2x + 2z = 0$ إذا $x = z = 0$

و $2x = 0$ إذا $x = 0$

إذن النقطة الحرجة هي (0,0) ومن الممكن وجود نهاية عظمى أو صغرى أو نقطة سرج عندها

وهذا ما يتعين التحري عنه :

والآن : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 2$

$$\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 2(0) - 2 = -2 < 0$$

إذن لا نهاية عظمى ولا صغرى عند النقطة (0,0) ولكن هناك نقطة سرج عند (0,0).

مثـال (٢):

حدد النهاية الصغرى والعظمى ونقطة السرج أن وجدت للدالة الآتية :

$$y = 4x + 2z - x^2 + xz - z^2$$

الجواب:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4 - 2x + z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2 + x - 2z$$

والآن كي يتحقق الشرط الضروري للنقطة الحرجة لابد أن تكون كل من:

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

إذن :

$$4 - 2x + z = 0$$

$$2 + x - 2z$$

وبحل هاتين المعادلتين آنياً نحصل على :

الجزء الثاني

والآن توصلنا إلى النقطة الحرجة وهي $(x,y)=(\frac{10}{3},\frac{8}{3})$ ولكن ربما هناك $x=\frac{10}{3}, z=\frac{8}{3}$

نهاية عظمى أو صغرى، لنلجأ إلى مواصلة الاختبار :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-2, \frac{\partial^2}{\partial z^2}=-2, \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}=1$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}=-2(-2)-1>0$$

إذن هناك نهاية عظمى أو صغرى ولكن ما هي لنواصل الاختبار : بما أن :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-2<0, \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}=-2<0$$

إذن النهاية هي عظمى عند النقطة $(\frac{10}{3},\frac{8}{3})$

مثـال (٣):

جد النهاية العظمى أو الصغرى ونقطة السرج أن وجدت في الدالة الآتية :

$$z=x^2-y^2-4x+4y+15$$

الجـواب:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-4$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-2y+4$$

والشرط الضروري للنقطة الحرجة أن تكون كل من $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}=0$

وعندما $2x-4=0$ فإن : $x=2$

و $-2y+4=0$ فإن : $y=2$

والآن لنبحث عن طبيعة هذه النقطة الحرجة :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \partial^2 z = o$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial x \partial y} = 2(-2) - 0 = -4 < 0$$

إذن لانهاية عظمى ولا صغرى بل نقطة سرج وهي (2,2).

<u>مثـال (٤):</u>

جد نهاية العظمى أو الصغرى ونقطة السرج أن وجدت في الدالة الآتية:

$$z = x^3 - 9xy + y^3$$

<u>الجواب:</u>

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^3 - 9y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -9x + 3y^2$$

وبجعل كل من $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ يتحقق الشرط الضروري للنقطة الحرجة ثم نحل المعادلتين بعد اختصارهما :

$$x^2 - 3y = 0$$

$$-3x + y^2 = 0$$

فنحصل على $x = 3$ $y = 3$

والآن ما هي طبيعة هذه النقطة الحرجة (3,3) = (x,y) لنختبر :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -9$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\left[6(3)\right]\left[6(3)\right]-9=315>0$$

إذن نقطة عظمى أو صغرى عند النقطة (3,3) وحيث أن :

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}>0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}>0$ إذن النهاية صغرى عند النقطة (3,3) .

تمارين (٦-٤)

حدد النهاية الصغرى أو العظمى أو نقطة السرج في كل من الدوال الآتية :

١- $z=3x+y^2-5xy+3x^2-y$

٢- $z=y+x^2+2xy$

٣- $z=y^3+x^2-2y+4x$

٤- $f(x,y)=5x^2-y^2+3xy$

٥- $g(x,y)=x^2-4xy$

٦- $z=ax^2y$

٧- $h(x,y)=12-x^2+2y^2+xy$

٨-١٤-٤- النهاية العظمى والصغرى المقيدة

Maximum and Minimum Subject to Constraints

إذا كانت لدينا دالة مقيدة بقيود متساوية (معادلات) أو غير متساوية متباينات فهناك طرق عديدة لا يجاد النهاية العظمى أو لصغرى لهذه الدوال المقيدة ومن أكثر هذه الطرق شيوعاً طريقة (مضاعفات لاكرانج) (lagrange multipliers)[٢] لحل الدوال المقيدة بمعادلات.

---

[٢] جوزيف لويس لاكرانج : عالم رياضي وفلكي فرنسي (١٧٣٦-١٨١٣) ويسمى في بعض المؤلفات ب لا كرينج (راجع : عدنان نجم الدين وطالب حسن وكريم الحسناوي . الاقتصاد الرياضي . جامعة بغداد ،١٩٨٩، ص (١٥٩) ساهم في وضع الحساب المتري وله باع تطوير بعض المفاهيم في الرياضيات العامة .

من الممكن تعظيم أو تصغير الدالة f(x,y) الواقعة تحت القيد (constraint): $g(x, y) = 0$ ، وبعبارة أخرى يمكن وضع الدالة بصيغة دالة هدف objective function مقيدة بقيد معين لتكوين النموذج التالي :

دالة الهدف : تعظيم أو تصغير $z = f(x,y)$

وفقاً للقيد (subject to) : $g(x,y) = 0$

وطبقاً لطريقة لاكرانج تعاد صيغة النموذج بالآتي :

$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ حيث أن λ هو مضاعف لاكرانج وهو مجهول يضاف إلى المجاهيل في الدالة F ولحل النموذج تتبع الخطوات التالية :-

١- تجرى التفاضلات الجزئية للدالة $F(x, y, \lambda)$ بالنسبة للمتغيرات x,y,λ.

٢- نضع النتائج مساوية للصفر لتصبح لدينا ثلاث معادلات هي :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = g(x, y) = 0$$

وبحل هذه المعادلات نحصل على قيم x, y, λ ثم نجري اختبار النقطة العظمى أو الصغرى بنفس الأسلوب الذي عرضناه سابقا" راجع الفقرة (٤ -١٤-٧). وفي أكثر الأحيان لا نحتاج لقيمة λ ولهذا لا يبذل جهد في استخراجها ويكتفي بالإشارة يشار إليها أحيانا بالمضاعف غير المحدد .إلا أن λ من الناحية الاقتصادية ذات معنى لكونها تشير إلى كمية التغير في دالة الهدف عند تغير القيد وحدة واحدة .

لتوضيح ذلك بالمثال الآتي :

مثال:

ينتج احد المصانع نوعين من الزيوت هما (x),(y) وفق دالة تكاليف هي:

$$c = 2x^2 + 3y^2 - 2xy$$

فما هي الكميات التي يستطيع أن ينتجها المصنع من كل من الزيت (x),(y) بأقل التكاليف الممكنة إذا علما بان المصنع المذكور لا يستطيع إنتاج أكثر من (7) ألف طن من كلا النوعين؟

الجواب:

بإعادة صياغة المسالة:

دالة الهدف (تصغير التكاليف) $c = 2x^2 + 3y^2 - 2xy$ بشرط أن:

$$x + y = 7$$

وبصيغة لاكرانج نحصل على:

$$F(x, y, \lambda) = c(x, y) - \lambda(x, y)$$

$$= 2x^2 + 3y^2 - 2xy - \lambda(x + y - 7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x - 2y - \lambda = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 6y - 2x - \lambda = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -x - y + 7 = 0 \quad (3)$$

وقبل حل هذه المعادلات آنيا نشير إلى أن $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ ما هي إلا القيد نفسه بعد تغيير إشارة الطرفين ولهذا من الممكن للاختصار أن تجري التفاضلات بالنسبة للمتغيرين y,x ووضع معادلة القيد كمعادلة ثالثة كما هي(وبإشارة مغايرة) . والآن نتابع الحل:

بطرح المعادلة (2) من (1) ينتج :

$$6x - 8y = 0 \; ... \; (4)$$

وبجمع المعادلة (3) بعد ضربها في (6) مع المعادلة (4) ينتج :-

$$-14y = -42$$

$$\therefore y = 3$$

وبالتعويض في إحدى المعادلات نحصل على:

$$x = 4$$

$$\lambda = 10$$

∴ النقطة الحرجة هي عند (4,3)

والآن نبحث عن كون هذه النقطة نهاية صغرى ما دمنا نبحث عن تصغير التكاليف (c) ولدينا :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 4$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 6$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -2$$

ومن ذلك يظهر بان $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = (4)(6) - (-2) = 26 > 0$

∴ هناك نهاية عظمى أو صغرى وحيث أن :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$$

لذلك فالنهاية صغرى عند النقطة (3 ، 4) ومن ذلك نستنتج بأن المصنع أعلاه بإمكانه إنتاج (4) آلاف طن من الزيت(x) و(3) آلاف طن من الزيت (y) بأقل التكاليف الممكنة والبالغة :

$$c = 2(4)^2 + 3(3)^2 - 2(3)(4) = 35$$

مع الأخذ بنظر الاعتبار القيد المفروض على التكاليف بان لا يزيد إنتاجه من النوعين عن (7) آلاف طن .

ويمكن توسع طريقة مضاعفة لاكرانج كي تشمل دالة هدف فيها k من المتغيرات أي أن $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ وهذه الدالة مقيدة بقيود عددها n أي $g_i(x_1, x_2, ... x_k) = 0$ حيث أن $i = 1, 2, ..., n$ وان $n \le k$

وبذلك تكون وفق دالة لاكرانج :

$$f(x_1, x_2, ..., x_k; \lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_n) = f(x_1, x_2 ..., x_k) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x_1, x_2, ... x_k)$$

وبإجراء التفاضلات نحصل على $n \times k$ من المعادلات التي ينتج عن حلها الحصول على قيم $n \times k$ من المجاهيل وبنفس الأسلوب يمكن الوصول إلى تحديد النهاية الصغرى أو العظمى للدالة الهدف.

٤-١٤-٩- شروط كون -توكر Kuhn - Tuker Conditions **(في إيجاد النهاية الصغرى أو العظمى للدالة ذات القيد المتباين)**

تختص طريقة لاكرانج في إيجاد النهاية الصغرى أو العظمى للدالة إذا كانت مقيدة بقيد متعادل أما إذا كان القيد متباين فإن الأمر يتطلب تعديل هذه الطريقة لأجل حل الدوال المقيدة بقيود متباينة (Inequality Constraints) ليكون النموذج كالآتي :

تعظيم أو تصغير f(x,y)

وفقاً للقيد : $g(x, y) \le 0$.

إن تحديد النهاية الصغرى أو العظمى لدالة ذات متغيرين مقيدة بمتباينة واحدة يمكن أن يتم وفق شروط ضرورية تسمى شروط كون -توكر وقد تكون الدالة مقيدة بأكثر من متباينة واحدة وهذا ما سنشرحه في الفصل الثاني. أما الآن فنقتصر على الشروط اللازمة لتحديد النهاية العظمى أو الصغرى للدالة $f(x,y)$.

تكون النقطة (x,y) نهاية عظمى نسبية لدالة $f(x,y)$ مثقلة بالقيد:

$$g(x,y) \le 0$$

إذا توفر λ غير سالب وأوفت كل من $(x,y),\lambda$ بالشروط الآتية:

١- $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0$$

٢. $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0$$

٣. $$\lambda g(x,y) = 0$$

٤. $$g(x,y) \le 0$$

إن هذه الشروط تصلح أيضا لتحديد النهاية الصغرى أيضا ما دامت النقطة العظمى للدالة $f(x,y)$ هي النقطة الصغرى للدالة $-f(x,y)$.

والآن لنتناول بعض الأمثلة لتوضيح عمل هذه الشروط :

مثال (١):

لو أخذنا المثال المذكور في الفقرة (٤-١٤-٨) مضاعف لاكرانج وأعيدت صياغة المسالة كالآتي:

دالة الهدف (تصغير التكاليف) $c = 2x^2 + 3y^2 - 2xy$

بشرط أن : $x + y \ge 7$

وعند حل المسالة بطريقة لاكرانج عندما يكون القيد معادلة حصلنا على:

الجزء الثاني

$$x = 4 \quad , \quad y = 3$$

دعنا الآن نستخدم شروط كون-توكر ونرى كيف تحل هذه المسألة :

نستخرج أولا:

١- $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} = (4x - 2y) - \lambda(1) = 4x - 2y - \lambda = 0$

٢- $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} = (6y - 2x) - \lambda(1) = 6y - 2x - \lambda = 0$

ولدينا بموجب شرط كون-توكر أيضاً:

٣- $\lambda g = \lambda(x + y - 7) = 0$

٤- $g = x + y - 7 \geq 0$

ومن العلاقة رقم (٣) أعلاه يكون لدينا إما $\lambda = 0$ أو $x + y - 7 = 0$

فإذا كانت $\lambda = 0$: فلا بد أن تكون $x = y = 0$ في العلاقتين (١، ٢) أعلاه وذلك كما موضح أدناه :

$$4x - 2y - 0 = 0$$

$$\underline{-2x + 6y - 0 = 0}$$

وبضرب المعادلة الثانية من (2) وطرحها من الأولى ينتج :

$$10y = 0$$

$$\therefore y = 0$$

وبالتعويض من إحدى المعادلتين ينتج بأن :

$x = 0$ أيضا"

$$\therefore x = y = 0$$

ولكن هذا لا يفي بمتطلبات المتباينة $x + y \geq 7$

أما إذا كانت :

فإن: $x = 7 - y$

وبالتعويض عن قيمة (x) في المعادلتين رقم (2 , 1) ينتج :

$$4(7 - y) - 2y - \lambda = 0$$
$$6y - 2(7 - y) - \lambda = 0$$

وبإعادة الترتيب :

$$6y + \lambda = 28$$
$$8y - \lambda = 14$$

وبالجمع ينتج :

$$14y = 42$$

$$\therefore y = 3$$

$$x = 4$$

ومن ذلك نستنتج ما يأتي ، تكون الدالة : $c = 2x^2 + 3x^2 - 2xy$ المقيدة بخطة الإنتاج $x + y \geq 7$ عند نهايتها الصغرى وذلك عند النقطة (3 , 4) و z=35

<u>مثال (٢) :</u>

جد النهاية العظمى للدالة الآتية المقيدة بالقيد المبين في أدناه :

$$z = 40x + 10xy - 7y^2 - 5x^2$$

بشرط أن: $x + y \leq 13$

(1)... $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = -10x + 10y + 40 - \lambda(1) = 0$$

(2)... $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 10x - 14y - \lambda(1) = 0$$

(3)... $$\lambda g(x,y) = \lambda(x + y - 13) = 0$$

(4)... $$g(x,y) = x + y - 13 \leq 0$$

نلاحظ ما يأتي : في العلاقة (3) أما $\lambda = 0$ أو $x + y - 13 = 0$ فإذا كانت $\lambda = 0$ فهذا يتطلب أن تكون $x = y = 0$ في العلاقة رقم (2 , 1) (لأحظ المثال الأول) وهذا لا يفي بمتطلبات القيد $x + y \leq 13$

أما إذا كانت $x + y - 13 = 0$ فإن $x = 13 - y$ وبالتعويض في العلاقتين (2 , 1) ينتج:

$$-10(13 - y) + 10y + 40 - \lambda = 0$$

$$10(13 - y) - 14y - \lambda = 0$$

$$-130 + 10y + 10y + 40 - \lambda = 0$$

$$130 - 10y - 14y - \lambda = 0$$

وبإعادة الترتيب :

$$20y - \lambda = 90$$

$$-24y - \lambda = -130$$

وبالطرح ينتج :

$$44y = 220$$

$$\therefore y = 5$$

وبالتعويض في أحدى المعادلتين ينتج: $x = 8$

ومن ذلك نستنتج بان الدالة تكون عند نهايتها العظمى عن النقطة $(x, y) = (8, 5)$، و $Z = 225$

تمارين (٧-٤)

١- جد النهاية العظمى أو الصغرى للدوال الآتية المقيدة بالقيود المبينة إزاء كل منها:

أ- $z = x^2 + 2y^2 - xy$

بشرط أن : $x + 2y = 21$

ب- $f(x,y) = 3y^2 - 2x^2 + 15 + 2xy$

بشرط أن : $x^2 - y = 16$

ج - $g(x,y) = x^2 + 3xy - y^2 + 8$

بشرط أن : $x + y = 8$

٢- جد النهاية العظمى للدالة :

$$f(x,y) = 6x^2 + 4y^2 - x + 2y$$

بشرط أن : $2x + 3y \le 9$

٣- جد النهاية الصغرى للدالة:

$$f(x,y) = y^2 - x^2 + xy - y$$

بشرط أن: $x + y \ge 2$

٤- جد النهاية الصغرى لدالة التكاليف الآتية :

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 5x + 2xy + 4$$

بشرط أن : $x - y = 6$

٥- أستخدم مضاعف لاكرانج لإيجاد أعظم الإرباح في دالة الإنتاج الآتية :

$$Q = 10 - x^2 + 8x - 2y^2 + 4y$$

بشرط أن : $2x + y \le 5$

الجزء الثاني

الفصل الخامس

التفاضل

وتطبيقاته الاقتصادية

التفاضل وتطبيقاته الاقتصادية

٥ـ١ مقدمة

تتسع تطبيقات التفاضل في النظرية الاقتصادية لتشمل معظم التحليلات الحدية كالتكاليف الحدية والعائدات الحدية والمرونات باختلافها والميل الحدي للادخار والاستهلاك ونسبة الضرائب الحدية والإنتاج والاستثمار الحدي والمنفعة الحدية وغير ذلك. وتعطي استخدامات حساب التفاضل عمقاً تحليلياً أكثر دقة للمتغيرات الاقتصادية المذكورة وتختصر على القارئ و الباحث الكثير من الشروحات التي كان يعتمدها الاقتصاد الوصفي. فمعدل التغير اللحظي الذي يستخرج باستخدام المشتقة موضوع غاية في الأهمية حيث يعطي هذا المعدل التحليلات الحدية مفهوما كميا يعكس مقدار التغير في المتغير المعتمد نتيجة لتغير ضئيل في المتغير المستقل أو المتغيرات المستقلة. كما يسهم مفهوم الحدية في توضيح مفهوم التوازن ويساعد في حساب التوقعات التي تحدث في المتغيرات الاقتصادية نتيجة التغيرات التي تطرأ على العوامل المؤثرة فيها وهذا بدورة يضع أمام متخذي القرارات وصفات دقيقة للمشكلة موضوعة البحث. ونستعرض في أدناه بعض جوانب النظرية الاقتصادية التي نحاول معالجتها عن طريق التفاضل.

أولاً: في نظرية المنفعة

٥ـ٢ دالة المنفعة Utility Function

يسعى المستهلك كمخلوق اقتصادي لاقتناء مختلف السلع والخدمات بهدف إشباع حاجاته المتباينة والمتنامية أقصى إشباع ممكن. وتؤثر في سلوكه هذا العوامل التالية:

١- دخل المستهلك.

٢- مدى توفر السلع في السوق.

٣- أسعار السلع المعروفة لدى المستهلك.

٤- ذوق المستهلك.

٥- وفي ضوء هذه المعلومات يقوم المستهلك بترتيب أفضلياته من السلع بموجب كميات تعكس رغباته وحسب الدالة الآتية:

$$U_n = (x_i), i = 1,2,......n \qquad (5\text{-}1)$$

حيث أن U هي قيمة التفضيل و x_i هي كمية السلع المدرجة في جدول أوليات المستهلك وn هو قائمة السلع في قائمته.

إن المعلومات التي يحصل عليها المستهلك من جراء استعراضه للعديد من السلع في السوق توفر له القدرة على تفضيل سلعة على أخرى. وتعتمد النظرية الحديثة للمنفعة على ترتيب ألا فضليات وليس على إعطاء قيمة معينة للمنفعة المستقاة من كل سلعة. وعندما يرتب المستهلك السلع الاستهلاكية في حدود معرفته فإنه يعطي أوزاناً معينة لكل سلعة وبذلك يكون أمام دالة تسمى دالة المنفعة ولتوضيح ذلك دعنا نفترض أن أمام المستهلك سلعتين فقط وقام بترتيبها وفق دالة منفعة أخذت الشكل الآتي:

$$U = f(q_1, q_2)$$

حيث أن q_1, q_2 هي الكميات المستهلكة من السلعة (1) والسلعة (2) على التوالي من قبل المستهلك أعلاه.

ويفترض أن $f(q_1, q_2)$ دالة مستمرة ولها مشتقة جزئية أولى وثانية.

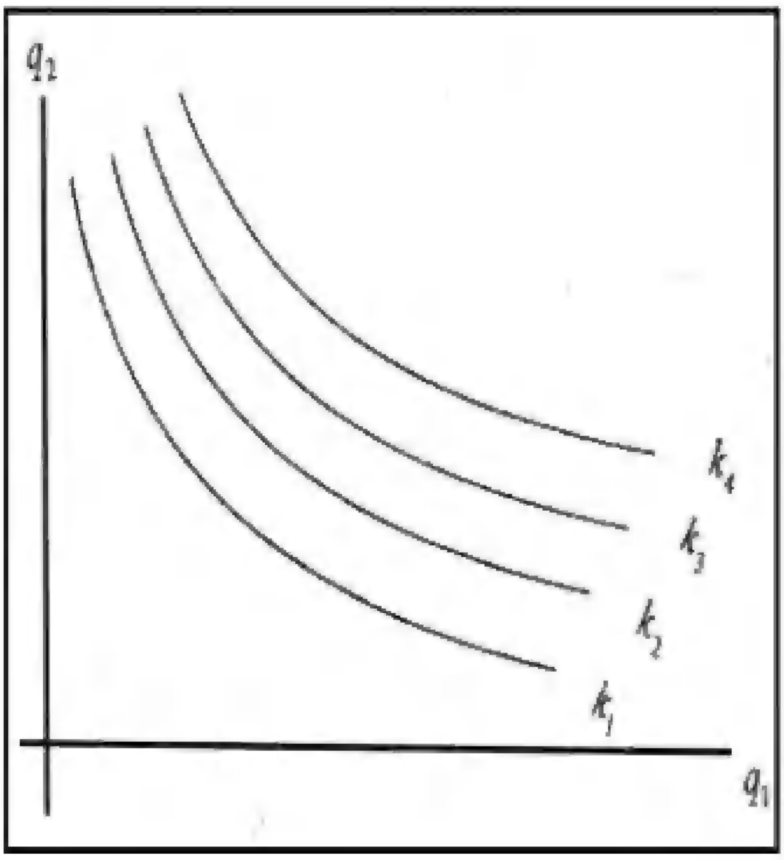
ملاحظة:

لقد رمزنا للكميات المستهلكة بالرمز q في حين استخدمنا في العلاقة (5-1) الرمز x بدلاً من ذلك وبالإمكان استخدام أي رمز آخر ما دام الرمز يجري تعريفه عند ذكر المعادلة أو الدالة المعنية.

ومن الفرضيات المهمة التي تقوم عليها دالة المنفعة كونها صحيحة لفترة محددة من الزمن بسبب تبدل ذوق المستهلك وتفصيلاته في المدى الطويل ويتبع ذلك تغير هيكل الدالة السائدة أو ظهور دالة منفعة جديدة تختلف عن الدالة السابقة.

وما دامت دالة المنفعة دالة مستمرة فإن مستوى معين من المنفعة يمكن أن يشتق عبر ما لانهاية من التراكيب (المزج) بين q_1, q_2 والمحل الهندسي لجميع هذه التراكيب (من كميات السلع التي يشتق منها المستهلك نفس المنفعة) وهو منحنى السواء.

وتقع منحنيات السواء في الربع الأول من الإحداثيات والمنحنى الأكثر منفعة يكون الأبعد عن نقطة الأصل ولا تتقاطع هذه المنحنيات لان هذا التقاطع يعني أن نفس التركيب من السلعتين q_1 q_2 لهما منفعتين مختلفتين كما يظهر في الشكل رقم (5-1).



شكل رقم (٥-١)

والآن كيف تجري عملية إحلال سلعة محل أخرى على منحني السواء ؟

- لنأخذ التفاضل الكلي المنفعة لدالة المنفعة فنحصل على :

$$du = dq_1 \frac{\partial U}{\partial q_1} + dq_2 \frac{\partial U}{\partial q_2}$$

$$-\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial q_1}}{\frac{\partial U}{\partial q_2}}$$

ويمثل انحدار منحني السواء dq_2 / dq_1 النسبة التي بموجبها يرغب المستهلك لإحلال q_1 أو q_2 أو q2 محل q1 للإبقاء على نفس المستوى من المنفعة وتمثل النسبة

السالبة: $(-\frac{dq_2}{dq_1})$ نسبة الإحلال السلعي أو المعدل الحدي للإحلال بين (q_1, q_2) والتي تساوي النسبة بين المشتقتين الجزئيتين لدالة المنفعة.

وتدعى كل المشتقتان الجزئيتان $\frac{\partial U}{\partial q_1}, \frac{\partial U}{\partial q_2}$ بالمنفعة الحدية للسلعتين $(q_1 q_2)$ على التوالي كما أن إشارتهما ونسبهما تكون ذات معنى. في حالة كون المنفعة الحدية موجبة وزاد المستهلك من الكميات المستهلكة من إحدى السلعتين مع بقاء الوضع على حاله بالنسبة للسلعة الثانية فإن ذلك سينقله إلى منحني سواء أعلى.

<u>مثـال (١)</u>

إذا كانت دالة المنفعة تساوي : $U = q_1^2 q_2$

وبمقتضى هذه الدالة وجد أن المستهلك قد استهلك (6) وحدات من q_1 و(8) وحدات من q_2 جد ما يأتي : -

ما هي الكميات التي ينبغي أن يشتريها من q_1 كي يحافظ على نفس المستوى من المنفعة إذا زادت مشترياته من السلعة q_2 إلى (10) وحدات.

أ) ما هي الكميات التي ينبغي أن تشتريها من q_2 كي يحافظ على نفس المستوى من المنفعة إذا انخفضت مشترياته من السلعة q_1 إلى (3) وحدات.

ب) إذا ارتفعت مشترياته كما في (أ) أعلاه إلى (10) من السلعة q_2 وحافظ المستهلك على نفس مستوى استهلاكه من السلعة q_1 أي (6) وحدات فما هو منحني السواء الجديد الذي ينبغي أن ينتقل إليه.

<u>الجـواب:</u>

أ) بتعويض قيم (q_1, q_2) المعطاة في الدالة (U) نحصل على :

$U = (6)^2(8)$

$= 288$

حيث أن q_2 ازدادت من (8) إلى (10) وحدات مع بقاء مستوى المنفعة (288) فإن q_1 يساوي :-

$$288 = (q_1)^2(10)$$

$$q_1^2 = 28.8$$

$$\therefore q_1 = \sqrt{28.8} \approx 5.4$$

ب) حيث أن q_1 ازدادت من (6) وحدات إلى (9) وحدات مع بقاء مستوى المنفعة (288) فإن q_1 يساوي :

$$288 = (9)^2(q_2)$$

$$q_2 = \frac{288}{81} = \frac{32}{9} \approx 3.6$$

ج) منحنى السواء الجديد نجده كالأتي :

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 2q_1q_2 > 0, \frac{\partial u}{\partial q_2} = q_1^2 > 0$$

وحيث أن المنفعة الحدية موجبة أذن زيادة المستهلك من استهلاكه لسلعة q_1 مع بقاء الوضع على حاله بالنسبة للسلعة q_1 ينقله إلى منحني سواء جديد قيمته كالآتي:

$$U = (6)^2(10)$$

$$= 360$$

بعد أن كان (288) كما موضح في (أ) أعلاه.

<u>مثـال (٢) :</u>

جد قيمة المنفعة الحدية لكلا السلعتين في دالة المنفعة الآتية واحسب مقدار المنفعة إذا كانت q_1

$U = q_1^2 q_2^3$ و $= 4, q_2 = 2$

<u>الجـواب:</u>

$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 2q_1q_2^3$ المنفعة الحدية للسلعة q_1

$\frac{\partial U}{\partial q_2} = 3q_1^2 q_2^2$ المنفعة الحدية للسلعة q_2

أما مقدار المنفعة فهو في حالة كون $q_1 = 4, q_2 = 2$ فهو : $U = (4)^2 (2)^3 = 24$

٣ـ٥ تعظيم الإشباع Maximization Satisfaction

بموجب الفرضية الأساسية لنظرية سلوك المستهلك والطلب فإن المستهلك يحاول توزيع دخله المحدود بين السلع والخدمات المتوفرة لديه ساعياً لتحقيق أقصى إشباع ممكن.

فإذا كانت لدينا على سبيل المثال سلعتان هما (x_1,x_2) وكان سعر السلعتين في السوق هو (p_1,p_2) على التوالي وكان دخل المستهلك النقدي خلال الفترة المعينة y إن أقصى ما يمكن أن ينفقه المستهلك خلال الفترة المعينة هو (y) موزعاً على الكميات المستهلكة من كل من (x_1,x_2) أي انه سينفق $(x_1p_1+x_2p_2)$ وحسبما يظهر في العلاقة الآتية :

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 \leq y$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

وهذا ما يسمى بقيد الميزانية أو قيد الدخل الذي لا يستطيع المستهلك تجاوزه، و إذا كانت دالة المنفعة كما يأتي :

$$U = (x_1, x_2)$$

ولتعظيم إشباع المستهلك أي تعظيم دالة المنفعة المقيدة بدالة الدخل يمكن استخدام مضاعف لاكرانج :

$$L = (x_1, x_2) - \lambda\ (x_1 p_1 + x_2 p_2 - y)$$

حيث أن λ هو مضاعف لاكرانج. والشرط الأول كي تكون الدالة عند نقطتها العظمى هوان تكون كل من المشتقتين الجزئيتين لـ x_1, x_2 تساويان صفراً وكما يأتي:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0 \quad (١)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0 \quad (٢)$$

وبنقل الحد الثاني من المعادلتين أي $(\lambda p_1, \lambda p_2)$ إلى الطرف الأيسر وقسمة المعادلة الأولى على الثانية ينتج :

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

ويظهر واضحاً أن $\frac{\partial U}{\partial x_1} / \frac{\partial U}{\partial x_2}$ هو المعدل الحدي للإحلال.

وإذا رمزنا لغرض التبسيط لكل من $\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}$ بـ U_1, U_2 نحصل على:-

$$U_1 - \lambda p_1 = 0$$

(من المعادلة رقم (١))

$$\therefore \lambda = \frac{U_1}{p_1}$$

$$U_2 - \lambda p_2 = 0$$

(من المعادلة رقم (٢))

$$\therefore \lambda = \frac{U_2}{p_2}$$

أي أن :

$$\therefore \lambda = \frac{U_1}{p_1} = \frac{U_2}{p_2} \qquad (5\text{-}2)$$

والنتيجة أعلاه هي النتيجة التي جاءت بها نظرية الطلب الاستهلاكي التقليدي والتي تقول بأنه عند النقطة توازن المستهلك تكون المنفعة الحدية للنقود λ مساوية للمنفعة الحدية للسلعة، وبصورة عامة فإن: $\frac{u_i}{p_i}, (i = 1,2,...,n)$

والآن خذ $\frac{U_2}{p_2} = \frac{U_1}{p_1}$ او $\frac{p_1}{p_2} = \frac{U_1}{U_2}$ نلاحظ أن معدل الإحلال السلعي (م أ س) بين السلعة (x_1, x_2) ينبغي أن يساوي النسبة بين سعر السلعة x_1 إلى سعر السلعة x_2 أي (x_1/ x_2). وبشكل عام فإن تعظيم منفعة السلعتين أعلاه (أو أية مجموعة من السلع) ينبغي أن يفي بمتطلبات الشروط الآتية:

$$MUM = \frac{U_1}{p_1} = \frac{U_2}{p_2} = ... = \frac{U_n}{p_n}$$

حيث يشير (MUM) إلى المنفعة الحدية للنقود (**Marginal Utility Money**).

مثـال (١):

إذا كانت دالة المنفعة هي: $U = x1x2$ و $p_1 = 4 , p_2 = 8$ ومقدار دخل المستهلك خلال الفترة (160) فكم يشتري المستهلك من كل من x_1,x_2 كي يحقق اكبر منفعة متقيداً بمقدار الدخل الذي لديه.

الجـواب:

دالة المنفعة هي: $U = x_1x_2$

قيد الدخل (الموازنة) هو $4x_1 + 8x_2 = 160$ وبحل المسألة بطريقة مضاعف لاكرانج نحصل على :

$$L = x_1x_2 - \lambda(4x_1 + 8x_2 - 160$$

والآن نجد المشتقات الجزئية :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - 4\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - 8\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 160 - 4x_1 - 8x_2 = 0$$

ومن المعادلات أعلاه تكون لدينا النتائج التالية :

$$\lambda = \frac{x_2}{4}$$

$$\lambda = \frac{x_1}{8}$$

$$\therefore \lambda = \frac{x_1}{8} = \frac{x_2}{4}$$

أو $$\frac{x_2}{x_1} = \frac{4}{8}$$

أو $$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

حيث أن $p_1 = 4, p_2 = 8$ أسعار السلعتين x_1, x_2 على التوالي.

وبتحقق الشروط اللازمة لتعظيم المنفعة حسب العلاقة (5-2) أي يكون $\lambda = \frac{U_1}{p_1} = \frac{U_2}{p_2}$

ويظهر من النتيجة أن: $p_1 = 4, p_2 = 8, U_1 = x_2, U_2 = x_1$

وذلك لأن :

$$U_1 = \lambda p_1$$

$$\lambda = \frac{x_2}{p_1}$$

$$\therefore U_1 = \frac{x_2}{p_1} = x_2$$

وبالمثل فإن: $U_2 = x_1$

والآن : بما أن $\frac{x_1}{8} = \frac{x_2}{4}$

$$\therefore x_1 = \frac{8x_2}{4}$$

وبالتعويض في : $4x_1 + 8x_2 = 160$ نحصل على:

$$\frac{4(8x_2)}{4} + 8x_2 = 160$$

$$16x_2 = 160$$

$$x_2 = 10$$

$$x_1 = \frac{8(10)}{4} = 20$$

وهذا واضح بأنه يفي بمتطلبات التعظيم :

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{10}{20} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{4}{8}$$

أي أن المستهلك يحقق اكبر منفعة ممكنة إذا اشترى (20) وحدة من x_1 و (10) من x_2 وعند ذلك تكون المنفعة (200) حيث أن :

$$U = x_1 x_2 = 20(10) = 200$$

<u>مثال٢:</u>

إذا كانت دالة المنفعة تحتوي على سلعتين بالصيغة الآتية : $U = 3x_1^2 + x_2^3$

وكان قيد الموازنة (الدخل) هو : $2x_1 + 3x_2 = 18$

وواضح من قيد الموازنة أن: $p_1 = 2, p_2 = 3, y = 18$

جد أعظم نقطة للمنفعة التي يحصل عليها المستهلك. وكم يستهلك من كل من x_2, x_1 لبلوغ هذه النقطة ؟

<u>الجـواب:</u>

$$L = 3x_1^2 + x_2^3 - \lambda(2x_1 + 3x_2 - 18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 6x_1 - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{x_2} = 3x_2^2 - 3\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 18 - 2x_1 - 3x_2 = 0$$

من المعادلتين الأولى والثانية نحصل على:

$$\lambda = \frac{6x_1}{2} = 3x_1$$

$$\lambda = \frac{3x_2^2}{3} = x_2^2$$

$$\therefore \lambda = 3x_1 = x_2^2$$

$$x_1 = \frac{x_2^2}{3}$$

وبالتعويض في دالة الموازنة نحصل على:

$$2(\frac{x_2^{\ 2}}{3}) + 3x_2 = 18$$

$$2x_2^2 + 9x_2 - 54 = 0$$

$$\therefore x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-9 \pm 22.6}{4}$$

$x_2 = \frac{-9-22.6}{4} = -7.9$ (تهمل لكونها كمية سالبة لا يؤخذ بها اقتصادياً)

أو : $x_2 = \frac{-9+22.6}{4} = 3.4$

وبالتعويض عن قيمة $x_2 = 3.4$ بدالة الموازنة ينتج :

$$2x_1 + 3(3.4) = 18$$

$$\therefore x_1 = 3.9$$

وبذلك فإن أقصى منفعة يمكن أن يحصل عليها المستهلك هي عند شراءه (3.9) وحدة من x_1 و (3.4) وحدات من x_2 وبذلك يحقق منفعة قدرها:

$$U = 3(3.9)^2 + (3.4)^3 = 45.63 + 39.30 = 84.93$$

تمارين (١-٥)

١- **إذا أعطيت دالة المنفعة لمستهلك معين بالصيغة الآتية :**

$$U = q_1^{\,2} q_2^{\,2}$$

وقد قام هذا المستهلك باقتناء (5) وحدات من (q_1) و (8) وحدات من (q_2) والمطلوب إيجاد :

أ) كم عدد الوحدات من (q_1) يتعين أن يقتني بهدف الإبقاء على نفس المستوى من المنفعة أذا زادت مقتنياته من (q_2) إلى (10) وحدات.

ب) كم عدد الوحدات من (q_2) يتعين أن يقتني بهدف الإبقاء على نفس المستوى من المنفعة إذا زادت مقتنياته من (q_1) إلى (7) وحدات.

٢- **جد المنفعة الحدية لدوال المنفعة الآتية :**

$$U = q_1^{\,2} + 2q_2$$

$$U = 2q^2{}_1 q_2^{\,4}$$

الجزء الثاني

٣- إذا كانت دالة المنفعة لأحد المستهلكين هي :

$$U = x_1^2 x_2$$

وكانت أسعار السلعتين (x_1, x_2) في السوق هي $(p_1 = 2)$ و$(p_2 = 5)$ وقدر دخل المستهلك خلال الفترة بمقدار(500) فما عدد الوحدات التي يجب أن يشتريها المستهلك من كل من (x_1) و (x_2) كي يحقق أقصى منفعة ممكنة ؟ مع التقيد بمقدار الدخل الذي بحوزته.

٤- إذا كانت دالة المنفعة كالآتي :

$$U = 2x_1 + 3x_2^3$$

وكانت قيد الموازنة هو : $x_1 + 2x_2 = 20$

جد أعظم مستوى من المنفعة يمكن أن يحصل عليها المستهلك محددا مقدار ما يستهلكه من كل من (x_1, x_2) لبلوغ هذا المستوى.

ثانياً- في نظرية الطلب

٤-٥ دالة الطلب Demand Function

وهي العلاقة بين الكميات المطلوبة (المشتراة) وبين العوامل المحددة لها كسعر السلعة المشتراة و أسعار السلع الأخرى ومستوى دخل المستهلك وغير ذلك وعموما فإن الطلب على السلعة (a) يمكن أن يكتب داليا بالآتي :

$$D_a = f(x_a, x_n y) \qquad (5\text{-}3)$$

حيث أن D_a يمثل الطلب على السلعة (a)

و x_a سعر السلعة (a)

و x_n أسعار n من السلع الأخرى.

و y دخل المستهلك.

ويمكن اختصار العلاقة (5.3) إلى ما يأتي بافتراض أن (x_n, y) ثابتة :

$$D_a = f(x_a) \quad (5\text{-}4)$$

وحيث أن الطلب على السلعة (a) عند أي مستوى من مستويات السعر هو مجموع الكميات المطلوبة من قبل (n) من المستهلكين عند ذلك المستوى أي أن :

$$D_a = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_a), (i = 1,2,....n)$$

والعلاقة أعلاه يمكن أن تكتب للتبسيط كما يلي :

$$D = f(x) \quad (5\text{-}5)$$

وسنأتي على بعض تطبيقات هذه الدالة أثناء تناول الفقرة التالية.

٥_٥ العائدات الكلية والعائد الحدي
Total Revenue and Marginal Revenue

بما أن مجموع الإيرادات (العائدات) يساوي مجموع الطلب (D) (المبيعات) مضروباً بالسعر السائد (p) الذي يبعث به السلعة فإن معادلة العائدات الكلية تظهر رياضياً كالآتي :

$$R=PD \quad (5\text{-}6)$$

حيث أن R تمثل العائدات الكلية.

أما العائد الحدي فإنه التغير في العائدات الكلية المتأتي من التغير في الطلب بوحدة واحدة ولتوضيح ذلك إذا أخذنا دالة الطلب (بشكلها المعكوس) :

$$P = f(D)$$

وطبقاً للعلاقة (5-6) فإن العائدات الكلية ستكون R = PD وبإيجاد المشتقة الأولى لدالة العائدات الكلية (5-6) نحصل على دالة العائدات الحدية وكما يأتي:

$$R' = MR = \frac{dR}{dD} = p\frac{dD}{dD} + D\frac{dP}{dD} = P + D\frac{dp}{dD} \quad (5\text{-}7)$$

وكما قلنا سابقاً أن منحني الطلب ذو انحدار سالب في الحالات الاعتيادية لذلك فإن قانون الطلب يقضي بأن :

$$f'(D) = \frac{dp}{dD} < 0$$

وفي هذه الحالة سيكون :

P > MR

أما إذا كان منحني الطلب أفقي أي : $f'(D) = 0$

فإن: P = MR

وإذا كان العائد الحدي (R') كمية معطاة (معلومة) فعند ذلك يمكن معرفة العائدات الكلية عند مستوى مبيعات (طلب) معين وذلك بإجراء عملية التكامل الآتية ونكتفي هنا بذكر المعادلة دون الدخول بأية تفصيلات حيث سنأتي على شرح ذلك في موضوع التكامل وتطبيقاته.

$$R = \int_{0}^{D} (MR)dR \qquad (5\text{-}8)$$

أما متوسط العائدات (AR) فهو العائدات الكلية مقسوماً على الكميات المباعة أي:

$$AR = \frac{R}{D} = \frac{PD}{D} = P \qquad (5\text{-}9)$$

مثال (١) :

إذا افترضنا أن دالة الطلب على البسكويت في إحدى الأسواق هي :

$$P = 8 - (0.4D)$$

والمطلوب:

إيجاد دالتي العائدات والعائدات الحدية ومتوسط العائدات

الجواب :

$$R = PD = D(8 - 0.4D$$

$$= 8D - 0.4D^2$$

وهذه هي دالة العائدات الكلية.

أما العائدات الحدية حسب العلاقة (7-5) فهي:

$$MR = \frac{dR}{dD} = P + D\frac{dP}{dD}$$

وما دامت مشتقة P = 8 - 0.4D هي :

$$\frac{dP}{dD} = -0.4$$

$$\therefore MR = P + D(-0.4)$$

$$= (8 - 0.4D - 0.4D)$$

$$= 8 - 0.8D$$

وهي دالة العائدات الحدية.

ويمكن إيجاد دالة العائدات الحدية مباشرة باشتقاق دالة العائدات :

$$R = 8D - 0.4D^2$$

أي أن:

$$\frac{dR}{dD} = 8 - 0.8D$$

أما متوسط العائدات :

$$AR = \frac{8D - 0.4D^2}{D}$$

$$= 8 - 0.4D$$

<u>مثـال (٢):</u>

إذا أخذنا دالة الطلب الآتية :

$$P = 6 - 0.7D$$

حيث يمثل (p) السعر و(D) الكميات المطلوبة، جد :

أ- مجموع العائدات.

ب- العائدات الحدية.

ج- متوسط العائدات.

د- ارسم الخط البياني.

<u>الجواب:</u>

أ) مجموع العائدات :

$$R = PD = D(6 - 0.7D)$$

$$= 6D - 0.7D^2$$

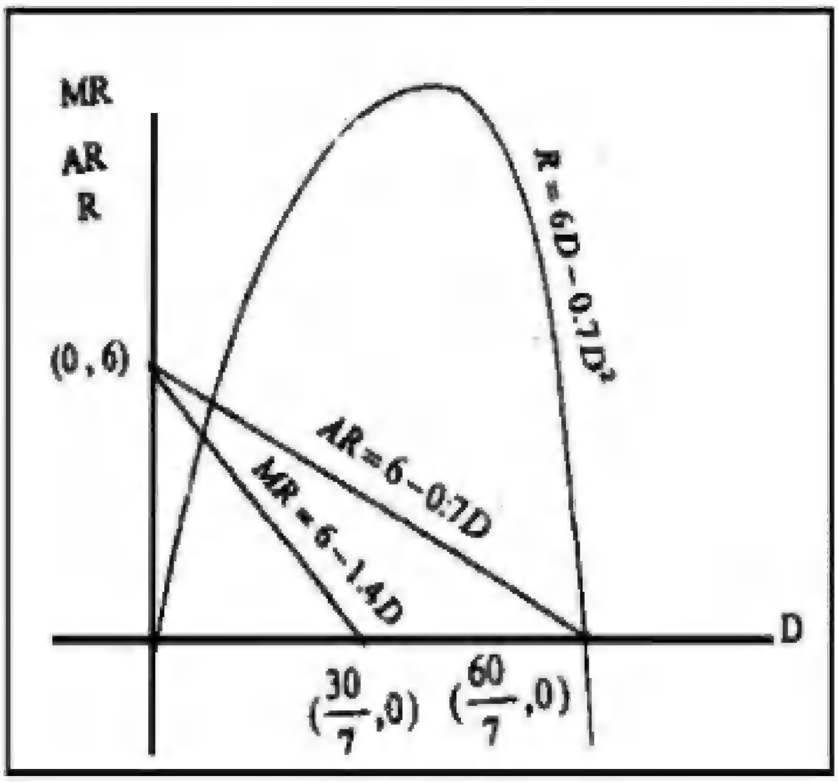
ب) أما العائدات الحدية :

$$R' = MR = \frac{dR}{dD} = 6 - 1.4D$$ (باستخدام الطريقة القصيرة)

ج) ومتوسط العائدات

$$AR = \frac{6D - 0.7D^2}{D} = 6 - 1.7D$$

د) الرسم البياني كما في الشكل (5-2) ومنه نستنتج ما يأتي :



شكل رقم (٢-٥)

١- إن العائدات الكلية (تتزايد ثم تتناقص) كلما تزايدت الكميات المطلوبة، في حين تتناقص كل من العائدات الحدية ومتوسط العائدات (خطيا) كلما تزايدت الكميات المطلوبة.

٢- إن لكل من العائدات الحدية ومتوسط العائدات نفس الجزء المحصور (أي المقدار 6) إضافة إلى وقوع منحنى العائدات الحدية أسفل منحنى متوسط العائدات.

٣- إن منحنى العائدات الحدية يقطع المحور D عند مستوى طلب تكون عائداته في مستواها الأعظم.

٤- يقطع منحني العائدات ومنحني متوسط العائدات المحور D عند مستوى الطلب يساوي ضعف ما هو عليه في الفقرة (٣).

٥- يلاحظ بأن مقدار انحدار منحنى متوسط العائدات يساوي نصف مقدار انحدار منحنى العائدات الحدية.

٦-٥ العائدات الحدية في حالة الاحتكار والمنافسة

يواجه المحتكر دالة طلب ذات انحدار سالب فإذا زد من أسعار سلعته فإن مبيعاته تتناقص وإذا أراد أن يزيد مبيعاته فإن ذلك يقتضيه تخفيض أسعاره ولهذا فإن عائداته هي اعتيادياً حاصل ضرب السعر (p) في الكميات (D) كما في المعادلة (5-6) أي أن: R = PD

ويمكن معاملة العائدات كدالة للكميات إذا ما أخذت الأسعار كدالة للكميات وكما في المعادلة -5)

(7 وعليه تكون العائدات الحدية هي: $MR = P + D\dfrac{dP}{dD}$ (ذات انحدار سالب)

لذلك فإن السعر (P) هو دائماً أعلى من العائدات الحدية في حالة الاحتكار. أما في حالة المنافسة التامة فإن المنتج يأخذ السعر دائماً كحالة معطاة ٠ (أي انه مؤشر ثابت) لذلك فإن دالة عائداته تكون:

R = PD

وحيث أن P ثابت في حالة المنافسة التامة فإن:

$$MR = \frac{dR}{dD} = P \qquad (5\text{-}10)$$

أما متوسط العائدات فهو نفسه سواء في حالة الاحتكار أو المنافسة التامة لأن العائدات هي السعر مضروب في الكميات أي أن متوسط العائدات هو:

$\frac{R}{D} = \frac{PD}{D} = P$ والفرق بينهما هو أن السعر هو دالة الكميات في حالة الاحتكار وهو مؤشر فقط في حالة المنافسة التامة.

٥-٧ مرونات الطلب Elasticities of Demand

٥-٧-١ مرونة الطلب السعرية المباشرة

Direct Price Elasticity of Demand (DMD)

تعريف:

هي التغير النسبي في الكمية المطلوبة من سلعة معينة كرد فعل للتغير النسبي في سعر تلك السلعة.

خذ دالة الطلب:

$$D = f(P)$$

وعلية تكون الصيغة الرياضية لمرونة الطلب السعرية المباشرة هي:

$$\eta_p = \frac{\Delta D}{D} \div \frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta D}{\Delta P}\frac{P}{D}$$

نلاحظ انه إذا كانت $\Delta P \to 0$ فإن $\frac{\Delta D}{\Delta P}$ ما هي إلا المشتقة الأولى لدالة الطلب.

$$\therefore \eta_p = \frac{dD}{dP}\frac{P}{D} \qquad (5\text{-}11)$$

إن الحالات التي تأخذها η_p هي التي تحدد لنا درجة المرونة :-

١- إذا كانت $(-\infty < \eta_p < -1)$ فإن الطلب عالي المرونة.

٢- إذا كانت $\eta_p = -1$ فإن الطلب متكافئ المرونة.

٣- إذا كانت $\eta_p = 0$ فإن الطلب غير مرن تماماً.

٤- أما إذا كانت $(-1 < \eta_p < 0)$ فإن الطلب قليل المرونة.

وكثيراً ما تؤخذ القيمة المطلقة للمرونة عند عدم استخدام الاشتقاق وبذلك لا يظهر ميل الانحدار (أي الإشارة) إضافة إلى اتجاه البعض إلى اختصار الحالات الأربع إلى ثلاثة حالات واختصار مدياتها أيضاً لتكون كالآتي :

١- إذا كانت $\eta = 1$ يكون الطلب متكافئ المرونة.

٢- إذا كانت $\eta < 1$ يكون الطلب غير مرن.

٣- إذا كانت $\eta > 1$ يكون الطلب مرن.

<u>مثال :</u>

خذ دالة الطلب على سلعة ما بالشكل الآتي: $D = 8\text{-}0.5P$

ما هي مرونة الطلب السعرية ؟ وما قيمتها وحالتها إذا كانت $P = 6$ وحدات؟

<u>الجواب</u>

$$\eta_p = \frac{dD}{dp} = \frac{P}{D}$$

ولما كانت :
$$\frac{dD}{dP} = -0.5$$

فإن :
$$\eta_p = -0.5\frac{P}{D} = -\frac{0-5P}{D}$$

وإذا كانت $p = 6$

فإن:
$$\eta_p = \frac{-0.5(6)}{8-0.5(6)} = -\frac{3}{5}$$

نلاحظ $-1 < \eta_p < 0$ وبذلك يكون الطلب على هذه السلعة قليل المرونة أي أن درجة الاستجابة النسبية في الكميات المطلوبة للتغير النسبي في سعر السلعة ضعيف.

وبشكل عام إذا كانت دالة الطلب بالصيغة التالية :

$$D_i = (P_i , y).(i = 1,2,....n) \qquad (5\text{-}12)$$

حيث تمثل P أسعار السلع، y الدخل.

إذن مرونة الطلب السعرية المباشرة ستكون :

$$\eta_i = \frac{\partial D_i P_i}{\partial P_i D_i} \qquad (5\text{-}13)$$

بافتراض ثبات الدخل (y).

٥-٧-٢ العلاقة بين العائدات الحدية ومرونة الطلب السعرية

(MR and PED)

بموجب العلاقة (5-7) تبدو دالة العائدات الحدية MR كالآتي :

$$MR = \frac{dR}{dD} = P + D\frac{dP}{dD}$$

وبإعادة كتابة هذه الصيغة نجد :

$$MR = P(1 + \frac{D}{P}\frac{dP}{dD})$$

ولما كان : $\frac{D}{P}\frac{dp}{dD}$ ما هو إلا مقلوب مرونة الطلب السعرية (η_p) الواردة في العلاقة (5-11)

لذلك:

$$MR = P(1 + \frac{1}{\eta_p}) \qquad (5\text{-}14)$$

وتعتبر هذه العلاقة من أهم العلاقات في نظرية الأسعار حيث تربط بين العائد الحدي والسعر.

<u>مثـال (١) :</u>

إذا أخذنا المثال السابق حيث أن دالة الطلب هي: (D = 8 - 0.5P)، جد باستخدام العلاقة (5-14) العائدات الحدية:

الجواب:

بما أن:

$$\eta_p = -\frac{0.5P}{D}$$

$$\therefore MR = P(1 - \frac{D}{0.5P})$$

$$= P - 2D$$

وحيث أن P=16-2D معكوس دالة الطلب D = 8 - 0.5P

$$\therefore MR = (16 - 2D) - 2D = 16 - 4D$$

وللتحقق من صحة الحل نحل المسألة بالطريقة الاعتيادية ووفق العلاقة (6-5) فينتج :

$$R = PD$$

$$\therefore R = (16 - 2D)D = 16D - 2D^2$$

$$\therefore MR = \frac{dR}{dD} = 16 - 4D$$

وهي نفس النتيجة أعلاه.

مثال (٢):

إذا كانت دالة الطلب كما يأتي:

$$P = 150 - 2D^2$$

جد:

(أ) السعر ومستوى الطلب اللذان عندهما تكون العائدات عند أقصاها.

(ب) وضح العلاقة بين العائدات الحدية ومرونة الطلب السعرية.

الجواب:

(أ) لدينا:

$$R = PD = D(150 - 2D^2)$$

$$= 150D - 2D^3$$

$$\therefore MR = \frac{dR}{dD} = 150 - 6D^2 = 0$$

(عندما تكونMR عند إحدى نهايتها العظمى أو الصغرى) فإن:

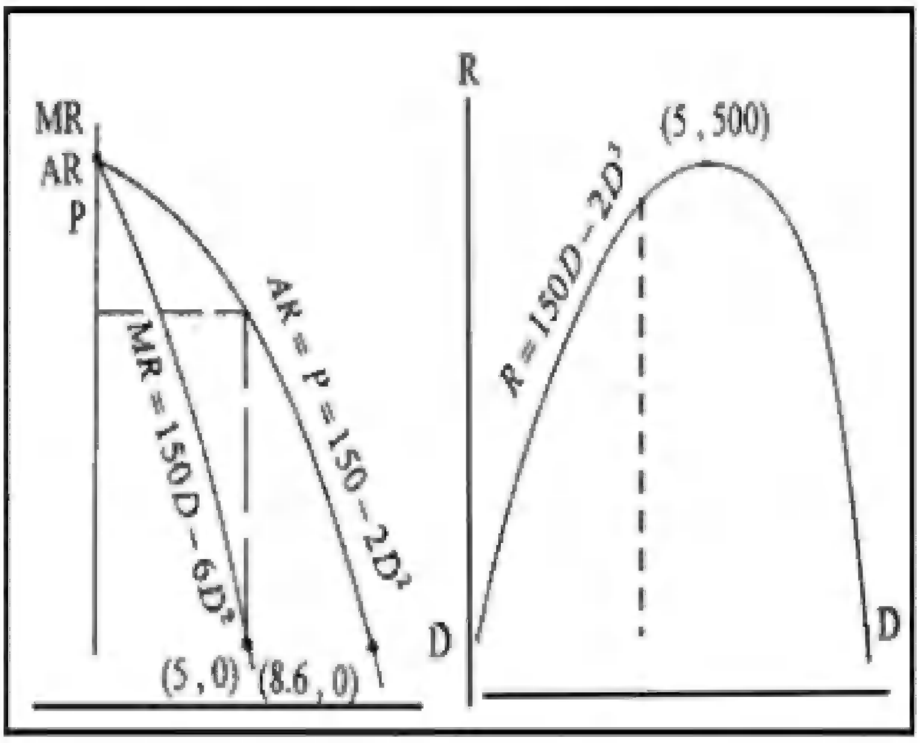
$D = 5$ و $\therefore D^2 = 25$

$R = 150(5) - 2(5)^3 = 500$ و

$p = 150 - 2(5)^2 = 100$ و

وحيث أن $\frac{d^2R}{dD^2} = -12D = -12(5) = -60 < 0$

إذن تكون العائدات أقصاها عندما D = 5 , P = 100 كما يظهر ذلك في الشكل رقم (3-5) أدناه :



شكل رقم (٣-٥)

(ب) عند حل المسألة بموجب العلاقة (5.14) والتي تربط بين المرونة والعائدان الحدية نحصل على ما يأتي :

لدينا:

$$MR = P\left(1+\frac{1}{\eta_p}\right)$$

بما أن:

$$\eta_p = \frac{dD}{dP}\frac{P}{D}$$

$$\therefore\ \eta_p = \left(\frac{1}{\frac{dP}{dD}}\right)\frac{P}{D}$$

وحيث أن $\frac{dp}{dD} = -4D$ (دالة الطلب $P = 150 - 2D^2$)

$$\therefore \eta_p = \frac{1}{-4D}\frac{p}{D} = \frac{p}{-4D^2}$$

$$MR = P\left(1+\frac{1}{\eta_p}\right)$$

$$= P\left(1+\frac{1}{\frac{P}{-4D^2}}\right) = P\left(1-\frac{4D^2}{P}\right)$$

$$\therefore MR = P - 4D^2$$

وبما أن :

$$p = 150 - 2D^2$$

$$\therefore MR = (150 - 2D^2) - 4D^2$$

$$= 150 - 6D^2$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها في الجواب أعلاه (أ).

٣-٧-٥ مرونة الطلب السعرية المتقاطعة

Cross Elasticity of Demand

تعريف:

تعرف مرونة الطلب السعرية المتقاطعة بأنها التغير النسبي في الكمية المطلوبة من سلعة معينة كرد فعل للتغير النسبي في سعر سلعة أخرى :

فإذا كانت دالة الطلب حسب الصيغة (5-12) هي :

فإن: $D_i = f(P_i, y)$

وإذا ما اعتبرنا الدخل ثابت في هذه العلاقة فإن:

$$\eta_c = \eta_{ij} = \frac{\partial D_i P_j}{\partial P_j D_i} \qquad (5\text{-}15)$$

حيث أن : $(i \neq j, j = 1,2,...,n)$ أما η_c فهي مرونة الطلب السعرية المتقاطعة بين السلعة i والسلعة j.

إن معامل المرونة η_c يدلنا على العلاقة بين السلعتين : السلعة المطلوبة وأية سلعة أخرى يؤثر سعرها على مقدار الطلب من السلعة الأولى. وباستخراجنا لقيمة معامل المرونة η_c يمكن أن تكون لدينا حالتان :-

١- إذا كانت قيمة $\eta_c < 0$ فإن السلعتين متكاملتان.

٢- إذا كانت قيمة $\eta_c > 0$ فإن السلعتين متنافستان أي تعوض إحداهما عن الأخرى.

مثال:

أعطيت دالة الطلب على السلعة رقم (1) بالتقدير التالي:

$$D_1 = 6 - 0.4P_1 - 0.2P_2 + 0.1P_3$$

حيث P_1, P_2, P_3 هي أسعار السلعة (1) أسعار السلعتين (2,3) على التوالي.

والمطلوب :

١- إيجاد معامل المرونة المتقاطعة بالنسبة لسعر السلعتين (2,3) على التوالي.

٢- إيجاد قيمة معامل المرونة بافتراض $p_1 = 4, p_2 = 2, p_3 = 3$

٣- تحديد فيما إذا كانت السلعتان (2,3) منافستين أو مكملتين للسلعة (1).

الجواب :

١- خذ العلاقة (5-14) وبهدف استخراج معامل المرونة وفق هذه الصيغة دعنا نجد قيمة:

$\frac{\partial D_i}{\partial P_j}$ بالنسبة للسلعة (2) ثم بالنسبة لسلعة (3)

وكما يأتي:

(أ) مرونة الطلب المتقاطعة المتأتية من العلاقة بين كمية الطلب على السلعة (1)وسعر السلعة (2)

أي اثر التغيرات في (p_2) على D_1 تكون :

هنا : (أي دالة الطلب رقم (1) وهي الدالة موضوع البحث).

و j=2 (أي اثر التغيرات النسبية في السلعة (2) وانعكاسها على التغيرات النسبية على دالة الطلب

).

إذن: $\frac{\partial D_1}{\partial P_2} = -0.2$

وبذلك تكون : $\eta_{12} = \frac{\partial D_1 P_2}{\partial P_2 D_1} = -0.2\frac{p_2}{D_1} = -\frac{p_2}{5D_1}$

(ب) مرونة الطلب المتقاطعة المحسوبة من مقدار تأثير (P3) على (D1) وهنا ستكون i=1 أيضا،

بينما j=3 :

ولدينا :

$$\frac{\partial D_1}{\partial P_3} = 0.1$$

وبذلك تكون :

$$\eta_{13} = \frac{\partial D_1 P_3}{\partial P_3 D_1} = 0.1\frac{P_3}{D_1} = \frac{P_3}{10D_1}$$

٢- معامل المرونة بافتراض أن $(P_1 = 4, P_2 = 2, P_3 = 3)$ يساوي :

إذا أخذنا P_1, P_3 كثوابت حيث أن قيمتيهما تساويان (4,3) على التوالي فإن:

$$\eta_{12} = \frac{p_2}{5[6 - 0.4(4) - 0.2p_2 + 0.1(3)]}$$

$$= \frac{p_2}{30 - 8 - p_2 + 1.5} = -\frac{p_2}{23.5 - p_2} = \frac{p_2}{p_2 - 23.5}$$

وذا كان سعر السلعة (2) يساوي (2) فإن مرونة الطلب المتقاطعة :

$$\eta_{12} = \frac{2}{2 - 23.5} = \frac{2}{-21.5} < 0$$

وهذا يشير إلى أن السلعتين (1,2)متكاملتين. أي عندما يزداد سعر السلعة (2) يتناقص الطلب على السلعة (1).

أما مرونة الطلب المتقاطعة η_{13} في حالة ثبات P_1, P_2.عند الحدود المعينة لهما أي عند (4,2) على التوالي فهي :

$$\eta_{13} = \frac{P_3}{10[6 - 0.4(4) - 0.2(2) + 0.1(P_3)]}$$

$$= \frac{P_3}{60 - 16 - 4 + P_3} = \frac{P_3}{40 + P_3}$$

ولما كان سعر السلعة (3) يساوي (3) فإن مرونة الطلب المتقاطعة :-

$$\eta_{13} = \frac{3}{40 + 3} = \frac{3}{43} > 0$$

ومن ذلك نستنتج أن السلعتين (1,3) متنافستان. وهذا يعني في حالة تزايد سعر السلعة (3) فإن الطلب على السلعة (1) يتزايد.

مثـال (٢) :

لدينا ثلاثة سلع: السلعة (1) والسلعة (2) والسلعة (3). ويعتمد الطلب على السلعة (1) على سعرها وعلى سعر السلعتين (2,3) وبهذا فإن دالة الطلب على السلعة (1) تكون بالشكل الآتي :

$$D_1 = 3P_1^{-2}P_2^5P_3^{-4}$$

والمطلوب أيجاد ما يأتي :

١- معامل المرونة السعرية للسلعة (1) أي التغير في الطلب عليها انعكاساً للتغير في سعرها.

٢- معامل المرونة المتقاطعة بين الطلب على السلعة (1) وسعر السلعة (2).

٣- معامل المرونة بين الطلب على السلعة (1) وسعر السلعة (3).

٤- أي من السلعتين مكملة للسلعة (1) وأيهما منافسة لها.

الجواب :

(١)

$$\eta_{11} = \frac{\partial D_1}{\partial P_1}\frac{P_1}{D_1}$$

$$= -6P_1^{-3}P_2^5P_3^{-4}\frac{P_1}{3P_1^{-2}P_2^5P_3^{-4}}$$

$$= -2$$

(٢)

$$\eta_{12} = \frac{\partial D_1}{\partial P_2}\frac{P_2}{D_1}$$

$$= 15P_1^{-2}P_2^4P_3^{-4}\frac{P_2}{3P_1^{-2}P_2^5P_3^{-4}}$$

$$= 5$$

$$\eta_{13} = \frac{\partial D_1}{\partial P_3}\frac{P_3}{D_1} \qquad (٣)$$

$$= -12P_1^{-2}P_2^5P_3^{-5}\,\frac{P_3}{3P_1^{-2}P_2^5P_3^{-4}}$$

$$= -4$$

(٤) وحيث أن : $\eta_{12} > 0$ فإن السلعة (1) والسلعة(2) متنافستان.

(٥) وإن : $\eta_{13} < 0$ فإن السلعة (1) والسلعة (3) متكاملتان.

٤-٧-٥ مرونة الطلب الدخلية Income Elasticity of Demand (IED)

تعريف:

هي التغير النسبي في الكمية المطلوبة من سلعة ما نتيجة للتغير النسبي في دخل المستهلك.

فإذا أخذنا دالة الطلب :

$$D_i = f(P_1, P_2, ..., P_n, y), (i = 1,2,...,n)$$

فإن مرونة الطلب الداخلية تكتب كما يلي :

$$\eta_y = \frac{\partial Di}{\partial y}.\frac{y}{Di} \qquad (5\text{-}16)$$

مثال (١) :

قدر احد الباحثين دالة الطلب على سلعة ما بالاتي :-

$$D_2 = 0.6p_1 - 0.7p_2 + 0.4y$$

حيث أن :

D_2 : تمثل مقدار الطلب على السلعة (2) السلعة موضوعة البحث.

p_1 : سعر السلعة (1) وهي سلعة أخرى.

p_2 : سعر السلعة (2).

أما y : فتمثل دخل المستهلك.

والمطلوب إيجاد :

١- معامل مرونة الطلب الداخلية على هذه السلعة.

٢- إيجاد قيمة هذا المعامل إذا افترضنا أن p_1, p_2, y تساوي 4,3,20 على التوالي.

الجواب:

١- لإيجاد معامل المرونة تتبع الخطوات التالية :-

أ- حدد قيمة (i) أي السلعة التي نريد استخراج معامل مرونة الطلب الدخلية عليها.

ب- إيجاد قيمة $\frac{\partial Di}{\partial y}$ أي مشتقة دالة الطلب على السلعة (i) بالنسبة للدخل (y).

ج- تطبق العلاقة (5-16) لإيجاد معامل المرونة المطلوب حيث أن $(i = 2)$ في هذه المسالة.

١- معامل مرونة الطلب الداخلية كما يأتي :

لما كانت :

$$\frac{\partial D_2}{\partial y} = 0.4$$

$$\therefore \eta_y = \eta_{2y} = \frac{\partial D_2}{\partial y} \cdot \frac{y}{D_2} = \frac{0.4y}{D_2}$$

٢- بالتعويض عن قيمة (p_1, p_2, y) المعطاة في معامل المرونة المستخرج نحصل على:

$$\eta_{2y} = \frac{0.4(20)}{0.6(4) - 0.7(3) + 0.4(20)} = \frac{8}{8.3}$$

$$= 0.96$$

٥-٧-٥ مرونة الطلب الداخلية والسلعة الكمالية أو الضرورية :

يدلنا معامل مرونة الطلب الداخلية على ما إذا كانت السلعة كمالية أو ضرورية وذلك حسب ما يلي :-

١- إذا كانت قيمة معامل مرونة الطلب الداخلية المستخرجة اكبر من واحد أي أن $(\eta_{11} > 1)$ فإن السلعة المعنية سلعة كمالية.

٢- أما إذا كانت $(1 > \eta_{11} > 0)$ فإن السلعة المعنية سلعة ضرورية.

٣- وإذا كانت $(\eta_{11} < 0)$ فالسلعة هي سلعة دنيا **(Geffen good)** [*]

<u>مثال (٢):</u>

من المثال السابق حدد فيما إذا كانت السلعة (2) كمالية أو ضرورية أو دنيا ؟

<u>الجواب</u>

لما كانت : $\eta_{21} = 0.9 \quad \therefore 0 < \eta_{21} < 1$

لهذا فإن السلعة (2) هي سلعة ضرورية وهذا يعني أن الطلب على هذه السلعة لا يتأثر إلا بشكل نسبي قليل في حالة حدوث تغيرات في دخل المستهلك.

٥-٧-٦ العلاقة بين مرونات الطلب

The Relations Between The Elasticities of Demand

من ابرز العلاقات بين دوال الطلب الاستهلاكي ما يوجز بالتالي :-

١- إن الكميات المطلوبة لا تتغير إذا حدث تغير نسبي في كل من الأسعار والدخل معاً.

٢- إن مجموع مرونة الطلب المتقاطعة السعرية ومرونة الطلب الدخلية يساوي مرونة الطلب السعرية المباشرة.

---

* اول من لاحظ أن بعض السلع عندما يرتفع دخل المستهلك تنخفض كمية المستهلك منها وعندما ينخفض دخل المستهلك يزداد استهلاكها هو روبرت جيفن (١٨٣٧-١٩١٠) وسميت السلعة من هذا النوع باسمة أو بالسلعة الدنيا.

إن العلاقتين أعلاه يمكن توضيحها كما يلي :-

العلاقة الأولى: إذا افترضنا أن دالة الطلب على السعة (1) من قائمة تضم (n) من السلع هي :

$$D_1 = f(p_1, p_2, ... p_n, y) \qquad (5\text{-}17)$$

إن الدخل المعول علية في دوال الطلب أو دوال الإنفاق الاستهلاكي وفي تحليلات اقتصادية أخرى هو الدخل الحقيقي الذي يمثل الدخل الجاري مقيما بالأسعار الثابتة. وقبل أن نشرح العلاقة الأولى دعنا نضرب مثلا لبيان الفرق بين الدخل الحقيقي والدخل الجاري.

إذا كان الدخل الوطني بالأسعار الجارية في سنة 1992 يساوي (1200) وفي سنة 1999 (2000) وكان الرقم القياسي العام للأسعار (على اعتبار سنة 1990 سنة الأساس) (106%) في سنة 1992 و(180%) في سنة 1999.

فالدخل الوطني الحقيقي بالأسعار الثابتة = $\frac{\text{الدخل الوطني بالأسعار الجارية}}{\text{الرقم القياسي}}$ × ١٠٠

ولذلك فإن:

الدخل الوطني الحقيقي من سنة 1992 يساوي :

$$\frac{1200}{106} \times 100 = 1132$$

والدخل الوطني الحقيقي من سنة 1999 يساوي :

$$\frac{2000}{180} = 100 = 1111$$

نلاحظ من ذلك أن الدخل الحقيقي في سنة 1999 اقل من الدخل الحقيقي في سنة 1992 رغم أن الدخل بالأسعار الجارية في سنة 1999 أكثر بكثير مما هو عليه في سنة 1992. ولهذا فإن السلوك الرشيد للمستهلك هو السلوك المبني على الدخل الحقيقي وليس على الدخل الجاري فإذا حدث تغير نسبي في الأسعار وصاحب ذلك تغير بنفس

الاتجاه والنسبة في الدخل النقدي فإن الكميات المطلوبة سوف لا تتغير ولهذا فإن زيادة الأسعار والدخل معا أو تقليصهما معا بنفس النسبة لا يؤثر على الكميات المطلوبة. أي أن المستهلك يستبعد من قراره الاستهلاكي تأثير ما يسمى بخداع النقد (Money illusion) أما إذا حدث تغير بالأسعار بنسبة تزيد عن نسبة تغير الدخل فهذا يعني أن دخل المستهلك الحقيقي قد انخفض مما يؤدي إلى تخفيض حجم مشترياته والعكس بالعكس. ولغرض إيضاح ذلك رياضيا نفترض أن بالوهم النقدي النسبي في الأسعار والدخل يساوي λ وهذا يتطلب رياضيا للإيفاء بشرط عدم التغير أن تكون :

الدالة : $D_1 = f(p_1, p_2, ... p_n, y)$ مساوية لـ

$$D_1 = f(\lambda p_1, \lambda p_2, ... \lambda p_n, \lambda y) \qquad (5\text{-}18)$$

$$D_1 = \lambda^{\circ} D_1 = (\text{لأن } \lambda^{\circ} = 1) \qquad (5\text{-}19)$$

ومن الناحية الرياضية أن الدالة التي تفي بمتطلبات (5-18) يتعين أن تكون دالة متجانسة من الدرجة صفر ولهذا فإن دالة الطلب هي دالة متجانسة من الدرجة صفر لجميع مستويات الأسعار والدخل كما مبين في (5-19).

<u>العلاقة الثانية</u> : لما كانت دالة الطلب متجانسة من الدرجة صفر فإن هذه الدرجة من التجانس تقضي بما يأتي تطبيقا لنظرية اويلر[*] (Euler)

$$\dots \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial D_{i1}}{\partial p_i} p_i + \frac{\partial D_1}{\partial y} y = 0 \qquad (5\text{-}20)$$

وبتقسيم كل حد في العلاقة (5-20) على D_1 ينتج :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial D_1}{\partial p_i} \frac{p_i}{D_1} + \frac{\partial D_1}{\partial y} \frac{y}{D_1} = 0 \qquad (5\text{-}21)$$

وحيث لدينا :

---

* (1) راجع(٤-١٤-٦)

$$-\eta_{11} = \frac{\partial D_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{D_1}$$ مرونة الطلب السعرية المباشرة

$$\eta_{1i} = \frac{\partial D_1}{\partial p_i}\frac{p_i}{D_1}, (i \neq 1)$$ مرونة الطلب المتقاطعة السعرية (5-22)

$$\eta_{1y} = \frac{\partial D_1}{\partial y}\frac{y}{D_1}$$ مرونة الطلب الداخلية

لاحظ أن : η_{11} سالبة لكون العلاقة بين السعر والكمية المطلوبة عكسية عادة مما يعطي $\frac{\partial D}{\partial P}$ قيمة سالبة.

وبتعويض العلاقات الواردة في (5-22) في العلاقة (5-21) ينتج :-

$$\dots\sum_{i=2}^{n}\eta_{1i} + \eta_{1y} = \eta_{11} \qquad (5\text{-}23)$$

إن العلاقة (5-23) توضح لنا بان مجموع مرونة الطلب المتقاطعة ومرونة الطلب الداخلية يساوي مرونة الطلب السعرية المباشرة.

٥-٧-٧ المرونة والعائدات الكلية

Revenue The Elasticity and the Total

إن بحث العلاقة بين مرونات الطلب والعائدات الكلية يمكن أن يتم من خلال استعراضنا لدرجات مرونة الطلب الثلاث "راجع الفقرة (٥-٧/أ) " كما يلي:-

إذا كان الطلب مرن أي أن $(\eta > 1)$ عند نقطة على منحنى الطلب نلاحظ حدوث التغيرات الآتية :

أ- إذا انخفضت الأسعار فإن الكميات المطلوبة ترتفع بنسبة اكبر من نسبة انخفاض الأسعار وان ذلك يؤدي إلى ارتفاع كبير في مستوى العائدات على اعتبار $(R = pD)$.

ب- وبالعكس إذا ارتفعت الأسعار فإن الكميات المطلوبة تنخفض بنسبة اكبر من نسبة ارتفاع الأسعار وهذا يؤدي إلى انخفاض كبير في مستوى العائدات.

١- إذا كان الطلب غير مرن أي أن $(\eta < 1)$ عند نقطة على منحنى الطلب فإن النتائج تكون عكسية. أي أن مستوى العائدات يتغير بنفس اتجاه تغير الأسعار.

٢- أما إذا كانت المرونة متكافئة $(\eta = 1)$ على منحنى الطلب فإن مستوى العائدات لا يتغير بتغير مستوى الأسعار.

٥-٧-٨ المرونة والعائدات الحدية

The Elasticity and The Manginal Revenue

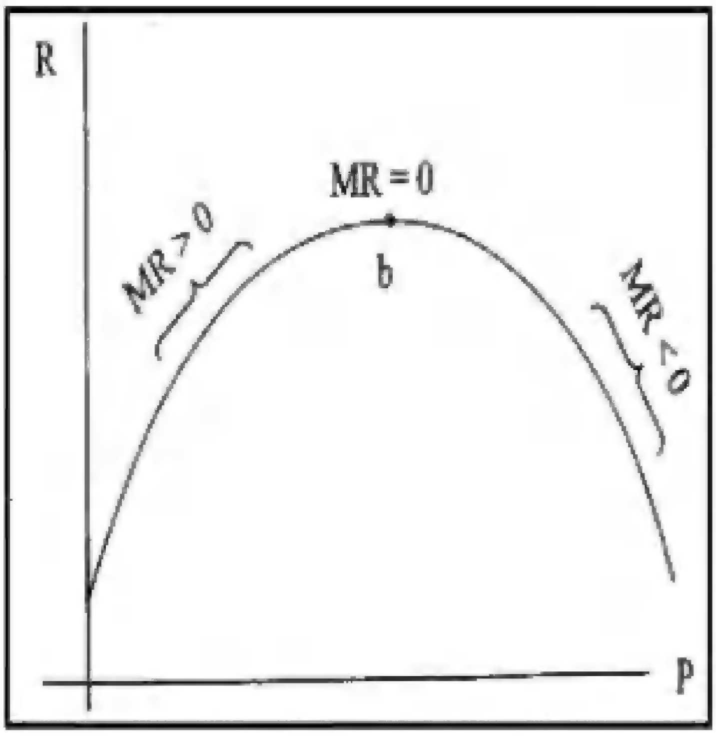
تبين لنا العلاقة $R = PD$ مستوى العائدات وان هذا المستوى أما أن يأخذ مساره نحو الارتفاع أو أن يستقر عند مستوى معين أو يميل نحو الانخفاض وتبعا لذلك تتغير العائدات الحدية متخذة الصفر كمؤشر لها. وذلك كما موضح أدناه :

١- عندما يرتفع مستوى العائدات فإن العائدات الحدية ستكون اكبر من صفر أي $(MR > 0)$

٢- أما إذا انخفض مستوى العائدات فإن $(MR < 0)$

٣- وإذا كان مستوى العائدات ثابت فإن $(MR = 0)$

ويظهر ذلك بيانيا بالشكل (5-4)



شكل رقم (٤-٥)

وبتغير رياضي آخر تتوضح النقاط أعلاه من خلال إيجاد مشتقة الدالة : بما أن : $R = f(p)$ أذن

: $MR = \frac{dR}{dP}$ وهذه تكون (اكبر من صفر) إذا كان انحدار منحنى العائدات (R) موجب، وتكون (صفر) إذا كان المنحنى (R) عند النقطة (P) أي عند أعلى نقطة ممكنة، وتكون (اصغر من صفر) إذا كان انحدار (R) سالب. أما العلاقة بين العائدات الحدية (MR) والمرونة (η) فتظهر بالتالي :

$$R = PD = Df(D)$$

حسب العلاقة (5-7)

$$MR = P + D\frac{dp}{dD}$$

وهذه يمكن إعادة كتابتها حسب الصيغة (5-14) لتكون :

$$MR = p\left(1 + \frac{1}{\eta_p}\right)$$

واستناداً إلى العلاقة أعلاه نستنتج ما يلي :

١- إذا كانت $\left(-\infty < \eta_p < -1\right)$ فإن $MR > 0$

٢- إذا كانت $(-1 < \eta_p < 0)$ فإن $MR < 0$

٣- أما إذا كانت $(\eta_p = -1)$ فإن $MR = 0$

<u>مثال:</u>

حدد العلاقة بين العائدات الحدية ومعامل المرونة في معادلة الطلب الآتية :

$$p = 48 - D^2$$

<u>الجواب :</u>

نستخرج أو إلا منحنى العائدات الكلية (R) :

$$R = PD = 48D - D^3$$

والآن نستخرج منحنى العائدات الحدية (MR) :

$$MR = \frac{dR}{dD} = 48 - 3D^2$$

والآن عندما يكون منحنى العائدات في أعلى نقطة له فإن:

$$MR = 48 - 3D^2 = 0$$

$$\therefore D^2 = 16$$

$$D = 4$$

وعليه يكون السعر :

$$P = 48 - (4)^2 = 32$$

وحيث أن:

$$\eta_p = \frac{dD}{DP} \frac{P}{D}$$

وإن :

$$\frac{dD}{dp} = \frac{1}{\frac{dp}{dD}}$$

وإن :

$$\frac{dp}{dD} = -2D$$

$$\therefore \frac{dD}{dp} = \frac{1}{-2D}$$

و

$$\eta_p = \frac{1}{-2D} \frac{p}{D}$$

$$= \frac{1}{-2(4)} \frac{32}{4}$$

$$\therefore \eta_p = \frac{8}{-8} = -1$$

وعليه فإن: $MR = 0$

وإذا افترضنا أن الكميات المطلوب تساوي (٣) فعند هذا المستوى نلاحظ أن :

$$p = 48 - (3)^2$$

$$= 39$$

وإن :

$$\eta_p = \frac{1}{-2(3)} \frac{39}{3}$$

$$= -\frac{13}{6} < -1$$

وعليه فإن $MR>0$ أي في حالة تزايد كما تشير الحالة (١) أعلاه. أما إذا أخذنا العائدات عن مستوى طلب يساوي (٦) فعند هذا المستوى نلاحظ بأن :

$$p = 48 - (6)^2$$

$$= 12$$

أما مرونة الطلب السعرية فتكون :

$$\eta_p = \frac{1}{-2(6)} \frac{12}{6}$$

$$= -\frac{1}{6} > -1$$

وعليه فإن $MR<0$ أي أن المنحنى في حالة تناقص كما تشير إلى ذلك الحالة (٢) أعلاه.

تمارين (٢-٥)

١- **قدرت دالة الطلب على إحدى السلع بما يأتي :**

$$D_1 = 3 - 2P_1 - P_2 - 0.6y$$

حيث أن :

D_1 : مقدار الطلب على السلعة المذكورة (وهي السلعة (1))

و P_1 : سعر السلعة (1)

و P_2 : سعر سلعة أخرى يرمز لها بالسلعة (2)

و y : دخل المستهلك

والمطلوب:

أ- إيجاد معاملات المرونات الآتية عند مستوى دخل (40) وأسعار $P_1 = 6, P_2 = 8$:

١- السعرية المباشرة

٢- المتقاطعة السعرية

٣- الدخلية

ب- التعليق على معاملات المرونة المستخرجة

٢- **قدرت دالة الطلب على الدراجات الهوائية بالتالي :**

$$D = -90 - 8.6P + 11.2y$$

حيث أن :

D : مقدار الطلب على الدراجات

P : سعر الدراجة الواحدة

Y : متوسط دخل المستهلك

والمطلوب :

أ- إيجاد معامل مرونة الطلب السعرية المباشرة والداخلية.

ب- استخدام معامل المرونة المستخرج لتحليل الدالة اقتصاديا.

٣- **افترض أن دالتي الطلب على السمنت والطابوق هما :**

$$D = 0 - 9P_1$$

$$B = 5 - 1.2P_2$$

حيث أن:

D :كميات الطلب على الطابوق

B : كميات الطلب على السمنت

P : سعر كل ألف طابوقة

P_2 : سعر الطن الواحد من السمنت

والمطلوب :

أ- إيجاد معامل مرونة الطلب السعرية المباشرة لكل من السلعتين.

ب- إجراء مقارنة بين معاملي المرونة المستخرجين.

٤- **كانت دالة الطلب على الحاسوب في إحدى الأسواق هي :**

$$p = 12 - 0.6D$$

حيث أن (p) تمثل الأسعار و(D) حجم الطلب , أستخرج الدوال الآتية: " العائدات والعائدات الحدية ومتوسط العائدات. "

٥- **إذا كان الطلب على الحمضيات يأخذ الدالة الآتية :**

$$D = 2 - 0.3p$$

حيث يمثل (D) حجم الطلب أما (P) فتمثل الأسعار والمطلوب :

أ) حساب مرونة الطلب السعرية.

ب) بيان حالة المرونة الذكورة إذا كان (P) يساوي (15).

٦- **وجد في إحدى الدراسات أن دالة الطلب على إحدى السلع كالآتي :**

$$p = 60 - 0.8D^2$$

أوجد :

أ) السعر ومستوى الطلب اللذان عندهما تكون العائدات في أعظم نقطة.

ب) توضيح العلاقة بين كل من العائدات الحدية ومرونة الطلب السعرية.

٧- كانت دالة الطلب على سلعتين في إحدى الأسواق كما يلي :

$$D = 2x_1^{2}x_2^{-3}$$

حيث أن (D) تمثل حجم الطلب و (x_1) سعر السلعة الأولى و (x_2) سعر السلعة الثانية.

أوجد ما يأتي :

١- معامل المرونة السعرية الأولى كاستجابة للتغيرات في سعرها.

٢- معامل المرونة المتقاطعة بين الطلب على السلعة الأولى وسعر السلعة الثانية.

٣- بيان فيما أذا كانت السلعتان متكاملتين أو متنافستين.

٨- حددت إحدى الدراسات الطلب على الملابس الجاهزة بالدالة الآتية :

$$D_1 = 0.5P_2 - 0.8P_1 + 0.2y$$

حيث أن (D_1) هو حجم الطلب على الملابس الجاهزة و (p_1) متوسط سعر القطعة الواحدة من هذه الملابس و (P_2) سعر سلعة أخرى. أما (y) فهو دخل المستهلك.

والمطلوب أيجاد ما يلي :

أ) مرونة الطلب الداخلية على الملابس الجاهزة.

ب) أيجاد قيمة معامل المرونة أذا كانت($P_1 = 3$) و($P_2 = 5$)و($y = 60$).

ثالثاً- في نظرية التكاليف On The Theory Of Cost

٨-٥ مقدمة

تعتبر أسعار الموارد والكفاءة الاقتصادية العاملين الأساسين الذين يسترشد بهما

المنظم في حساب كلفة الإنتاج في المنشاة. فعند كل مستوى إنتاج هناك مستوى تكاليف مقابل له.

ونتناول في هذه الفقرة تحليل دالة التكاليف في المدى القصير(short run) أولا ثم ننتقل إلى حالة التوسع في الإنتاج والوصول إلى حد الكفاءة المثلى لنناقش دالة التكاليف في المدى الطويل (long run).

فعند حساب الكلفة يواجه المنتج مسالة الكلفة الاجتماعية للإنتاج (social cost of production) أو ما يسمى بتكلفة الفرصة (apportunity cost) في ظل الموارد المحدودة فالمنتج الذي يوجه هذه الموارد نحو إنتاج السلعة X بدلاً من y فإنه بذلك يضحي (وكذلك المجتمع) بالحصول على السلعة y مقابل إنتاج السلعة X.أن كلفة هذه التضحية (الموارد) تسمى الكلفة الاجتماعية (أو كلفة الفرص). ويواجه المنتج كذلك مسالة التكاليف الضمنية (imlicit cost) التي تنشا عن الأرباح التي يمكن أن يحصل عليها من السلعة التي يقوم بإنتاجها باستخدام وقته وأمواله بطريقة أفضل. وإذا ما اخذ ذلك بنظر الاعتبار فإنه يحصل على أرباح اقتصادية صافية عند إنتاجه السلعة X إذا وفقط إذا زادت إيراداته عن مجموع تكاليف إنتاجه الصريحة (explicit cost) وتكاليف الضمنية. وما دام المنتج لم يصل حد الكفاءة الاقتصادية فإن التكاليف الضمنية تعتبر كمية ثابتة (في المدى القصير) وينبغي إضافتها إلى التكاليف الصريحة عند حساب الأرباح الاقتصادية الصافية.

نستنتج مما تقدم بان المنتج في المدى القصير لا يستطيع زيادة أو إنقاص بعض مدخلات الإنتاج ولهذا تضم كلفة هذه المدخلات إلى التكاليف الثابتة (fixed costs) أما المدخلات الأخرى التي تتغير مع تغير كمية الإنتاج فإن تكاليفها تشكل التكاليف المتغيرة (variable costs). أما في المدى الطويل فإن جميع المدخلات تتغير ومن ذلك يستطيع المنتج الحصول على أحسن مزيج كفوء للمدخلات أي يصل حد الكفاءة الاقتصادية.

وبهدف تسهيل صياغة دالة التكاليف في المدى القصير نشير إلى أن التكاليف الكلية تساوي مجموع التكاليف المتغيرة والتكاليف الثابتة.

٥-٩ دالة التكاليف في المدى القصير Short - run cost function

يمكن أن يشار إلى دالة التكاليف في المدى القصير بالاتي :

أو اختصاراً: $TC = TFC + TVC$

$$C = a + v(Q) \quad (5\text{-}24)$$

حيث تشير:

TC : إلى التكاليف الكلية (C)

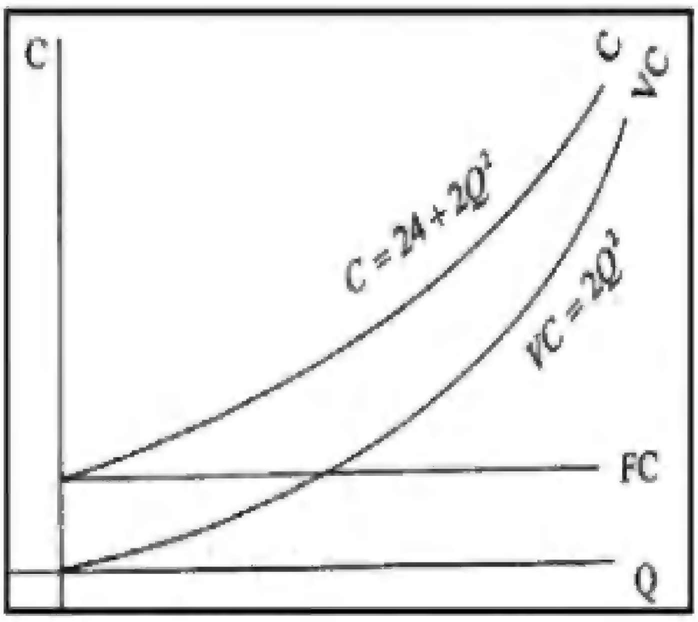
TFC : إلى التكاليف الثابتة (a).

TVC : دالة التكاليف المتغيرة التي تعطي مجموع التكاليف المتغيرة التي ترتبط بمستوى الإنتاج (Q) ورمزنا لها بـ V (Q). وإذا أخذنا الدالة التالية كمثال لدالة تكاليف:

$$C = 24 + 2Q^2$$

حيث يظهر بان التكاليف الثابتة (a) تساوي (24) في حين دالة التكاليف المتغيرة $v(Q) = 2Q^2$ وتشير (Q) إلى كمية الإنتاج.

وعند رسم هذه الدالة نحصل على الشكل رقم (5-5)



شكل رقم (٥-٥)

ويظهر في الشكل أعلاه التكاليف الثابتة التي تأخذ خطاً أفقياً موازياً للإحداثي (Q) كما يظهر منحنى التكاليف المتغيرة (VC).

٥_١٠ متوسط التكاليف Average Cost

أما متوسط التكاليف فهو كلفة الوحدة الواحدة من الإنتاج ويستخرج بقسمة التكاليف على عدد الوحدات المنتجة وهي على قسمين هما :

أ) متوسط التكاليف الثابتة

$$AFC = \frac{FC}{Q} = \frac{a}{Q} \qquad (5\text{-}25)$$

أما انحدار AFC فيساوي :

$$= \frac{d(AFC)}{dQ} = -\frac{a}{Q^2} \qquad (5\text{-}26)$$

(لاحظ : أن a هو مقدار ثابت)

ب) متوسط التكاليف المتغيرة فيساوي :

$$AVC = \frac{V(Q)}{Q} \qquad (5\text{-}27)$$

وانحدار AVC فهو :

$$\frac{d(AVC)}{dQ} = \frac{QV'(Q) - V(Q)}{Q^2} = \frac{1}{Q}\left[V'(Q) - \frac{V(Q)}{Q}\right] \qquad (5\text{-}28)$$

ج) متوسط التكاليف الكلية يساوي :

$$AC = \frac{a}{Q} + \frac{V(Q)}{Q} \qquad (5\text{-}29)$$

أما انحدار متوسط التكاليف الكلية فيساوي :

$$\frac{d(AC)}{dQ} = -\frac{a}{Q^2} + \frac{QV'(Q) - V(Q)}{Q^2}$$

$$= \frac{QV'(Q) - a - v(Q)}{Q^2}$$

$$= \frac{QV'(Q) - C}{Q^2}$$

$$= \frac{1}{Q}(V'(Q) - \frac{C}{Q}) \qquad (5\text{-}30)$$

مثال:

خذ دالة التكاليف الآتية : $C = 15 + 3Q^2 + Q$

والمطلوب إيجاد :

أ- متوسط التكاليف الثابتة والمتغيرة والكلية.

ب- انحدار كل من المتوسطات الثلاث أعلاه.

إذا كانت Q =10 وحدات.

الجواب:

أ)

١- متوسط التكاليف الثابتة $AFC = \frac{a}{Q} = \frac{15}{10} = 1.5$ حسب العلاقة (5-25)

٢- متوسط التكاليف المتغيرة $AVC = \frac{v(Q)}{Q}$ حسب العلاقة (5-27)

ولما كانت : $V(Q) = 3Q^2 + Q$

$$\therefore AVC = \frac{3(10)^2 + 10}{10} = 31$$

٣- متوسط التكاليف الكلية $AC = \frac{a}{Q} + \frac{v(Q)}{Q}$ حسب العلاقة (5-29)

$$\therefore AC = \frac{15}{10} + \frac{3(10)^2 + 10}{10}$$

$$= 32.5$$

ب) انحدار كل من المتوسطات الثلاث :

١- انحدار متوسط التكاليف الثابتة :

$$\frac{d(AFC)}{dQ} = -\frac{a}{Q^2} = -\frac{15}{100} = -0.15$$ حسب العلاقة (5-26)

٢- انحدار متوسط التكاليف المتغيرة :

$$\frac{d(AVC)}{dQ} = \frac{1}{Q}\left(V'(Q) - \frac{V(Q)}{Q}\right)$$ حسب العلاقة (5-28)

ولما كانت :

$$v'(Q) = \frac{d(AVC)}{dQ} = 6Q + 1 = 6(10) + 1 = 61$$

$$\therefore \frac{d(AVC)}{dQ} = \frac{1}{10}\left(61 - \frac{310}{10}\right)$$

$$= \frac{300}{100} = 3$$

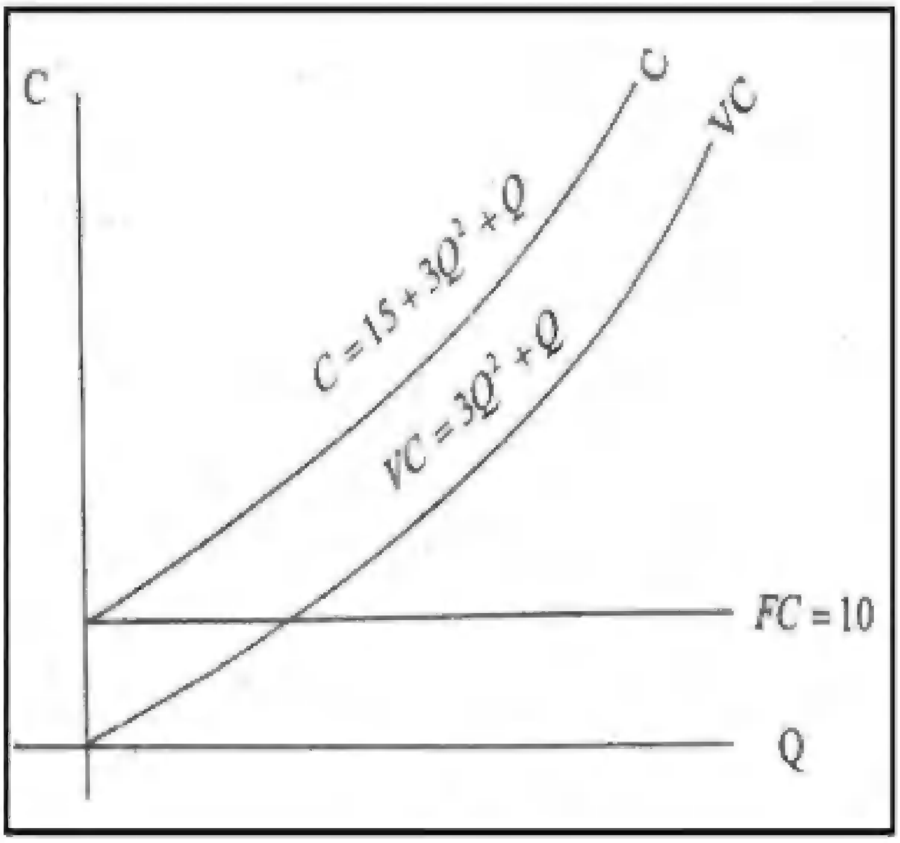
٣- انحدار متوسط التكاليف الكلية:

$$\frac{d(AC)}{dQ} = \frac{1}{Q}\left(V'(Q) - \frac{C}{Q}\right)$$ حسب العلاقة (5-30)

$$= \frac{1}{10}\left[6(10) + 1 - \frac{15 + 3(10)^2 + 10}{10}\right]$$

$$= \frac{61}{10} - \frac{325}{100} = 2.85$$

كما في الشكل رقم (5-6)



شكل رقم (٦-٥)

١١ـ٥ التكاليف الحدية MarginalCosts

تعرف التكاليف الحدية بأنها ما يضاف إلى التكاليف الكلية نتيجة لزيادة الإنتاج وحدة واحدة.

فإذا كانت دالة التكاليف كما في (5-24):

$$C = a + V(Q)$$

فإن أية إضافة على (Q) مهما كانت صغيرة تنعكس نسبيا على (c) ويمكن حساب ذلك باستخراج المشتقة الأولى للدالة.

$$MC = C' = \frac{dc}{dQ} = V'(Q)$$

حيث تشير (MC) إلى التكاليف الحدية.

<u>مثال:</u>

جد التكاليف الحدية في دالة التكاليف التالية :

$$C = 2Q^3 - Q^2 + 35$$

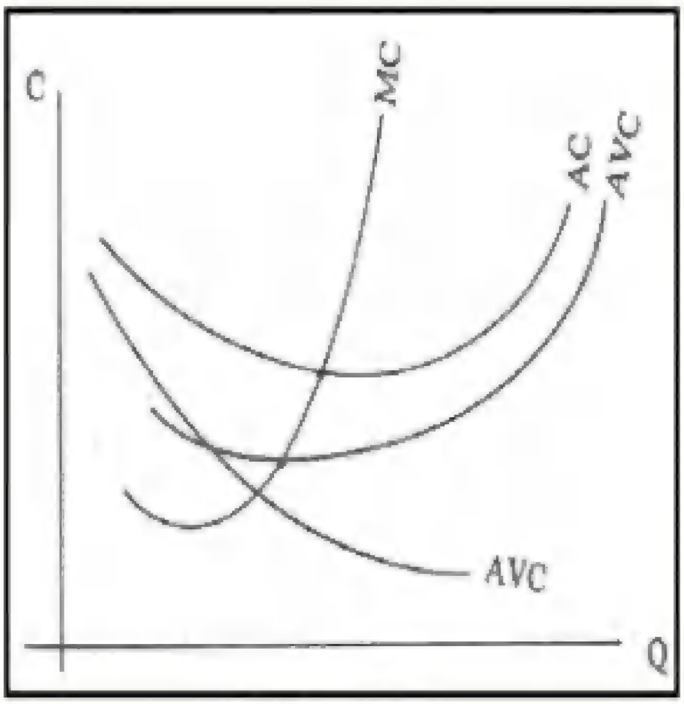
<u>الجواب:</u>

$$MC = \frac{dC}{dQ} = 6Q^2 - 2Q$$

ويلاحظ هنا أن مشتقة دالة التكاليف الكلية (C) ومشتقة دالة التكاليف المتغيرة($VC = 2Q^3 - Q^2$) متطابقتان ما دام الجزء الثابت من الدالة والذي يمثل التكاليف الثابتة (FC) يزول في حالة إجراء التفاضل.

١٢-٥ التكاليف الحدية ومتوسط التكاليف AC & MC

تأخذ العلاقة بين التكاليف الحدية ومتوسط التكاليف الشكل البياني رقم (5-7)



شكل رقم (٧-٥)

وتعتبر دالة التكاليف التكعيبية أو أكثر هي الأفضل لبيان العلاقات بين التكاليف والتكاليف الحدية لكونها تعطينا منحنيات على شكل حرف (U).

لذلك نلاحظ أن (AC),(AVC), (MC) أذا كانت منحنيات من الدرجة الثانية أو أكثر تنحدر تنازليا في أول الأمر ومن ثم تتزايد كلما ازداد الإنتاج وتبلغ (MC) حدها الأصغر قبل (AC) و(AVC) . أما (AVC) فيبلغ حده الأصغر قبل أن يبلغ ذلك (AC)

ويمر منحنى (MC) من خلال النقاط الصغرى لكل من (AC) و(AVC). ويظهر منحنى (AFC) على شكل القطع الزائد القائم (Rectangular hyperbola) (أي القطع الزائد الذي محوراه متساويان) بغض النظر عن شكل منحنيات التكاليف الأخرى. وحيث أن منحنى التكاليف الثابتة يتوزع على عدد كبير من الوحدات كلما توسع الإنتاج لذلك فإن منحنى (AFC) يتناقص تدريجيا".

ومن ذلك يتضح بان : $MC = AVC$ عندما يكون منحنى (AVC) في أدنى مستوى ويبدو ذلك كما يأتي :-

خذ :

$$AVC = \frac{V(Q)}{Q} \quad \text{حسب العلاقة} \qquad (5\text{-}27)$$

وحسب العلاقة (5-28) فإن:

$$\frac{dV(Q)}{dQ} = \frac{1}{Q}(V'(Q)) - \frac{V(Q)}{Q}$$

ويكون المنحنى (AVC) في أدنى مستوى له عندما $\frac{dV(Q)}{dQ} = 0$

أي أن: $$\frac{1}{Q}\left(V'(Q) - \frac{V(Q)}{Q}\right) = 0$$

وحيث أن الإنتاج (Q) هو دائما موجب أي (Q>0) لذلك فإن$(\frac{1}{Q} > 0)$ أيضاً.

ومن ذلك نستنتج أن المقدار بين القوسين يجب أن يكون صفرا" وهذا يؤدي إلى:

$$V'(Q) - \frac{V(Q)}{Q} = 0$$

$$\therefore V'(Q) = \frac{V(Q)}{Q} \qquad (5\text{-}31)$$

أي أن MC=AVC عندما يكون AVC في أدنى نقطة له.

وبنفس الطريقة فإن (MC=AC) عندما يكون منحنى (AC) في أدنى مستوى له ويبدو ذلك كما يأتي:

$$AC = \frac{a}{Q} + \frac{V(Q)}{Q}$$ حسب العلاقة (5-29)

وبموجب العلاقة (5-30) فإن:

$$\frac{d(AC)}{dQ} = \frac{1}{Q}\left(V'(Q) - \frac{C}{Q}\right)$$

ويكون المنحنى (AC) في أدنى مستوى له عندما $\frac{d(AC)}{aQ} = 0$

أي أن:

$$\frac{1}{Q}\left(V'(Q) - \frac{C}{Q}\right) = 0$$

وبما أن (Q>0) لذلك يجب أن يكون المقدار بين القوسين يساوي صفرا" أي أن :

$$V'(Q) - \frac{C}{Q} = 0$$

$$\therefore V'(Q) = \frac{C}{Q} \qquad (5\text{-}32)$$

$\therefore AC = MC$ عندما تكون AC في أدنى نقطة.

مثال (١):

كانت دالة التكاليف التربيعية في إحدى المصانع كالآتي :

$$C = 50 + 2Q^2$$

جد ما يأتي:

أ) متوسط التكاليف (AC) والتكاليف الحدية (MC).

ب) اثبت أن MC=AC عندما يكون AC في أدنى نقطة.

الجواب :-

أ) متوسط التكاليف يساوي :

$$AC = \frac{a}{Q} + \frac{V(Q)}{Q}$$

$$= \frac{50}{Q} + \frac{2Q^2}{Q}$$

$$= \frac{50}{Q} + 2Q$$

أما التكاليف الحدية فتساوي $MC = \frac{dC}{dQ} = 4Q$

(وهنا ظهرت دالة MC كدالة خطية)

ب) يكون متوسط التكاليف في أدنى نقطة عندما:

$$\frac{dAC}{dQ} = 0$$

$$\therefore \frac{dAC}{dQ} = \frac{1}{Q}\left(V'(Q) - \frac{C}{Q}\right) = 0$$ العلاقة (5-30)

$$\frac{1}{Q}\left(4Q - \frac{50 + 2Q^2}{Q}\right) = 0$$

$$4 - \frac{50}{Q^2} - 2 = 0$$

$$Q^2 = 25$$

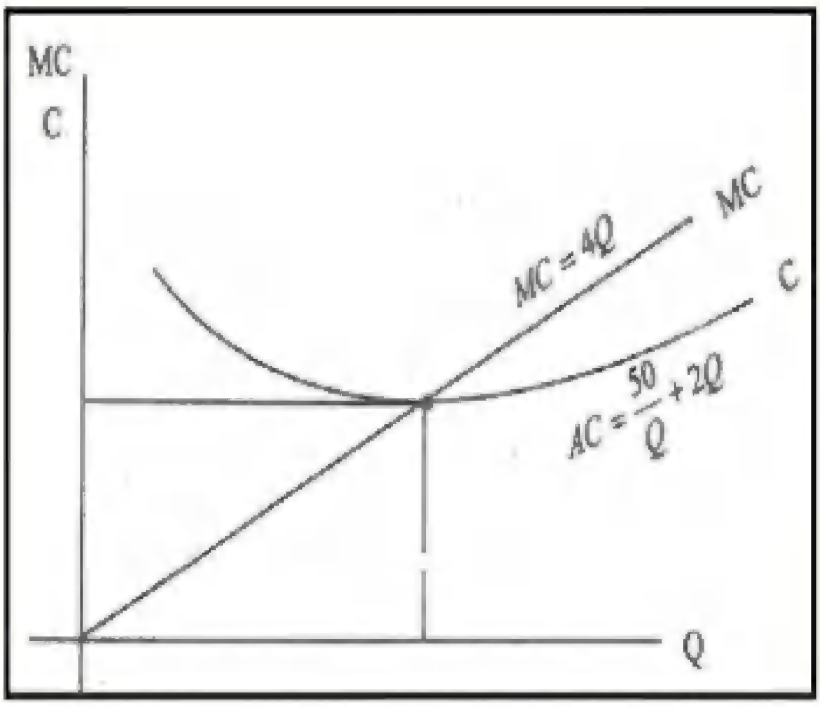
$$\therefore Q = 5$$

يكون منحنى (AC) في أدنى نقطة عندما يكون الإنتاج (5) وحدات وبتعويض هذا العدد في كل من معادلة (AC) و (MC) نحصل على:

$$MC = 4Q = 4(5) = 20$$

$$AC = \frac{50}{Q} + 2Q = \frac{50}{5} + 2(5) = 20$$

$\therefore MC=AC$ عند مستوى إنتاج (5) والذي ينخفض عنده متوسط التكاليف إلى أدنى نقطة. كما يظهر في الشكل رقم (5-8)



شكل رقم(٨-٥)

مثال (٢):

إذا كانت دالة التكاليف في مشروع إنتاجي هي :

$$C = 54 + 55Q - 21Q^2 + Q^4$$

جد ما يأتي :-

أ) متوسط التكاليف والتكاليف الحدية.

ب) مستوى الإنتاج الذي تتساوى عنده التكاليف الحدية ومتوسط التكاليف.

ج) مستوى الإنتاج الذي تتساوى عنده التكاليف الحدية ومتوسط التكاليف المتغيرة.

الجواب

أ) متوسط التكاليف (AC) وتكاليف الحدية (MC)

$$AC = \frac{C}{Q} = \frac{a}{Q} + \frac{V(Q)}{Q}$$

$$\therefore AC = \frac{54}{Q} + 55 - 21Q + Q^3$$

$$MC = \frac{dC}{dQ} = 55 - 42Q + 4Q^3$$

ب) مستوى الإنتاج الذي تتساوى عنده التكاليف الحدية ومتوسط التكاليف :

$$\frac{d(AC)}{dQ} = -\frac{54}{Q^2} - 21 + 3Q^2$$

ويكون في أدنى مستوى عندما : $\frac{d(AC)}{dQ} = 0$

$\therefore 3Q^4 - 21Q^2 - 54 = 0$ (بإعادة الترتيب)

$$(3Q^2 + 6)(Q^2 - 9) = 0$$

$Q^2 - 9 = 0 \quad \therefore Q = 3$ و $Q = -3$ (تهمل)

أو $Q = \sqrt{-2}$ $3Q^2 + 6 = 0$ (يهمل لأنه يعطي Q قيمة خيالية)

وهذا يعني أن منحنى التكاليف الحدية يقطع منحنى متوسط التكاليف عند أدنى نقطة له عند مستوى إنتاج (3) وحدات وهذا واضح عند تعويض (3) في كل من (MC)، (AC) حيث أن :

$$MC = 55 - 42(3) + 4(3)^3 = 37$$

$$AC = \frac{54}{3} + 55 - 21(3) + (3)^3 = 37$$

واضح بأنه عند مستوى الإنتاج (3) تتساوى كل من MC،AC.

ج) مستوى الإنتاج الذي تتساوى عنده التكاليف الحدية ومتوسط التكاليف المتغيرة:

$$AVC = \frac{V(Q)}{Q}$$

$$= 55 - 21Q + Q^3$$

$$\therefore \frac{d(AVC)}{dQ} = -21 + 3Q^2 = 0$$

$$3Q^2 = 21$$

$$Q = \sqrt{7} \approx 2.646$$

ومن ذلك يتضح انه عند مستوى إنتاج (2.646) يتساوى متوسط التكاليف المتغيرة والتكاليف الحدية حيث يتقاطعا عند هذا المستوى ويمكن إثبات ذلك بتعويض (2.646) في كل من (MC,AC) حيث أن:

$$MC = 55 - 42(2.646) + 4(2.646)^3 = 17.97$$

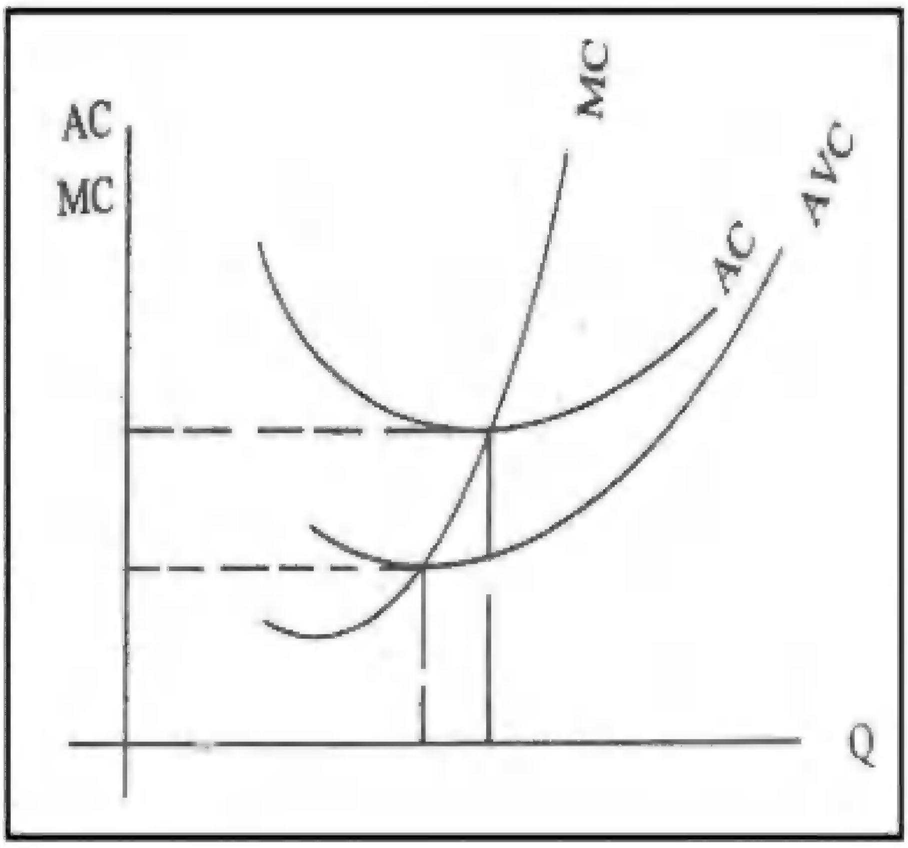
$$AVC = 55 - 21(2.646) + (2.646)^3 = 17.96$$

وهما نتيجتان متساويتان (والاختلاف البسيط بسبب التقريب)

∴ عند مستوى إنتاج (2.646) تقريبا تكون MC=AVC

ويلاحظ أيضاً أن منحنى(AVC) بلغ حده الأصغر قبل (AC) لان(3>2.646) ونستطيع إيجاد الحل بطريقة أخرى باستخدام كل من العلاقتين (5-31) و(5-32) والحصول على نفس النتيجة.

وتظهر (MC),(AC), (AVC) في الشكل رقم (5-9)



متوسط التكاليف والتكاليف الحدية

شكل رقم (٩-٥)

مثال:

في إحدى مصانع الاسمنت وجد أن دالة التكاليف كانت :

$$C = 2Q^3 - 3Q^2 - 12Q$$

جد ما يأتي:

أ) دالة التكاليف الحدية ودالة متوسط التكاليف.

ب) عند أية نقطة يكون منحنى متوسط التكاليف في أدنى مستوى.

مدللاً على ذلك من خلال تساوي التكاليف الحدية مع متوسط التكاليف.

الجواب :-

أ) دالة التكاليف الحدية : $V'(Q) = MC = 6Q^2 - 6Q - 12$

دالة متوسط التكاليف : $AC = \frac{C}{Q} = 2Q^2 - 3Q - 12$

ب) يكون منحنى متوسط التكاليف في أدنى نقطة عندما $\frac{d(AC)}{dQ} = 0$

وحيث أن AC من الفقرة (أ) أعلاه تساوي :

$$AC = 2Q^2 - 3Q - 12$$

$$\therefore \frac{d(AC)}{dQ} = 4Q - 3 = 0$$

$$\therefore Q = \frac{3}{4}$$

أي عند مستوى إنتاج $\frac{3}{4}$ يكون AC في أدنى مستوى.

وباستخدام $QV'(Q) = C$ أو $V'(Q) = \frac{C}{Q}$ نحصل على :-

$$Q(6Q^2 - 6Q - 12) = 2Q^3 - 3Q^2 - 12Q$$

$$6Q^3 - 6Q^2 - 12Q = 2Q^3 - 3Q^2 - 12Q$$

$$4Q^3 - 3Q^2 = 0$$

$$Q^2(4Q - 3) = 0$$

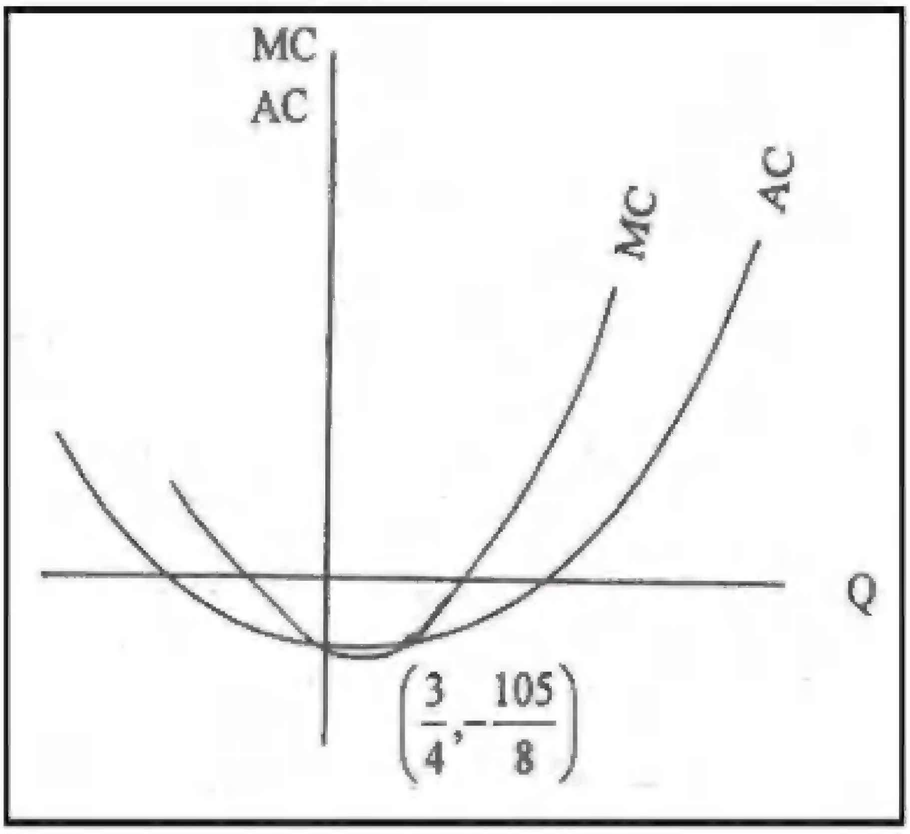
فإما: $Q^2 = 0, \therefore Q = 0$

(تهمل لأنه لا معنى للتحليل عندما لا يكون هناك إنتاج قط)

أو $4Q - 3 = 0 \therefore Q = \frac{3}{4}$

(وهي نفس النتيجة أعلاه)

كما مبين في الشكل رقم (5-10) أدناه :



شكل رقم (٥-١٠)

ويظهر من الشكل التالي:

١- إن أدنى مستوى لمتوسط التكاليف كان $(-\frac{105}{8})$ عند مستوى إنتاج $(\frac{3}{4})$.

(ما هذه النتيجة ؟... تكاليف سالبة)

٢- إن دالة تكاليف من هذا النوع دالة بعيد عن الواقع لأنها لم تقع في الربع الأول من الرسم البياني فليس من المعقول أن يكون هناك إنتاج $(Q > 0)$ ومتوسط التكاليف أو التكاليف الحدية سالبة $(MC < 0, AC < 0)$ وقد تناولنا هذا المثال لغرض اختبار مدى تطابق العمليات الرياضية مع المنطق الاقتصادي.

٥-١٣ تعظيم الأرباح ودلتا التكاليف والطلب
Maximizing profit and Cost and Demand Function

تتأتى الأرباح من الفرق بين مجموع العائدات ومجموع التكاليف وتكتب بصيغتها الدالية كالآتي :

$$\pi = R - C$$

حيث أن π تمثل الأرباح وR العائدات وC التكاليف. وكما أسلفنا القول بان العائدات ما هي إلا دالة للكميات المباعة ويمكن استخراجها من دالة الطلب كما أظهرته العلاقة (5-6) وهي :

$$R = PD$$

حيث أن : (P) هي السعر وهو دالة للطلب (D) في حالة الاحتكار.

واستناداً إلى ذلك إذا كانت :

$$P = 8 - 2D$$

و $$C = 3 + 0.7D$$

لذلك فإن: $R = D(8 - 2D)$

$$= 8D - 2D^2$$

وإن $$\pi = (8D - 2D^2) - (3 + 0.7D)$$

$$= -2D^2 + 7.3D - 3$$

وإن أقصى الأرباح تتحقق عندما $\frac{d\pi}{dD}$

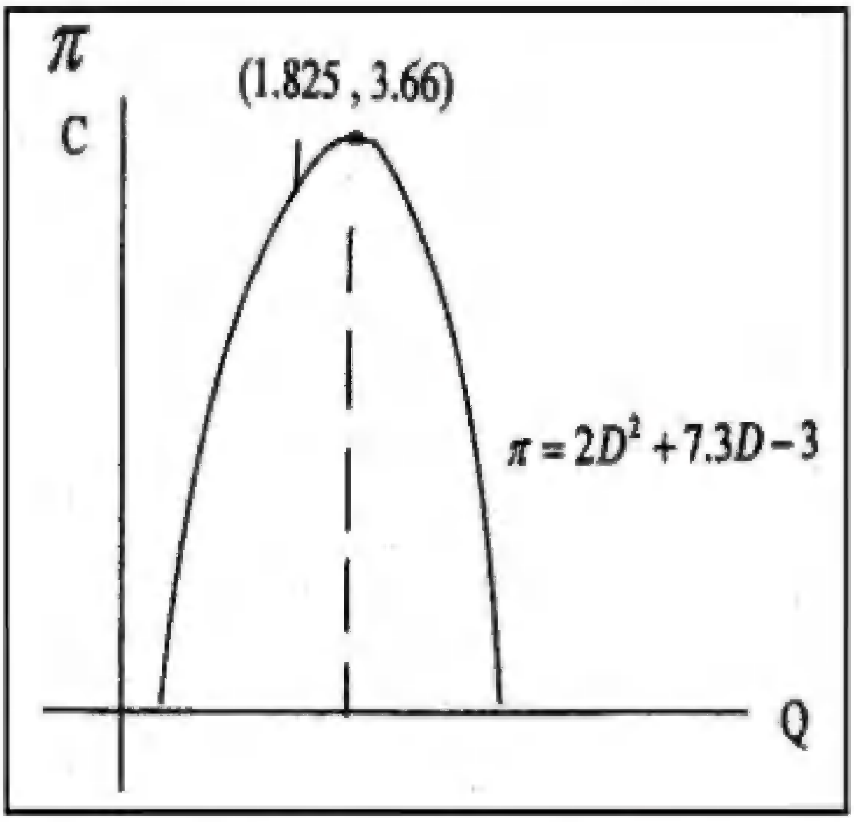
إذن $\frac{d\pi}{dD} - 4D + 7.3 = 0$

$$\therefore D = 1.825$$

وواضح بأنه عند $D = 1.825$ يكون المنحنى π عند أعظم نقطة فيه حيث أن :

$$\frac{d^2\pi}{dD^2} = -4 < 0$$

كما في الشكل رقم (5-11) :



شكل رقم (١١-٥)

لنأخذ حالة المنتج الاحتكاري الذي ينتج سلعتين أو أكثر كل سلعة تظهر في دالة طلب معينة، ولدية دالة تكاليف واحدة تحدد مجموع التكاليف التي يتحملها في إنتاج السلعتين معاً"، وتظهر هذه الدوال كالآتي :

$$D_1 = f(P_1)$$
$$D_2 = f(P_2)$$
$$C = f(D_1, D_2)$$

وعلية تكون العائدات من السلعة الأولى والسلعة الثانية كالآتي :

$$R = PD = P_1 D_1 + P_2 D_2$$

وبذلك تكون الأرباح كالآتي :

$$\pi = R - C = P_1\ D_1 + P_2 D_2 - f(D_1, D_2)$$

ويبحث المحتكر عن أعظم مستوى للأرباح من خلال تحقق الشرط الآتي:

$$\frac{\partial \pi}{\partial D_1} = \frac{\partial \pi}{\partial D_2} = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial w} = 4 - 4w - t - x = 0 \qquad (١)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} 5 - 2t - 2x - w = 0 \qquad (٢)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = 8 - 4x - 2t - w = 0 \qquad (٣)$$

ومن المعادلة (١) تكون :

$$t = 4 - 4w - x \qquad (٤)$$

وبتعويض ذلك في المعادلة (٢) ينتج :

$$5 - 2(4 - 4w - x) - 2x - w = 0$$

$$5 - 8 + 8w + 2x - 2x - w = 0$$

$$7w = 3$$

$$\therefore \quad w = \frac{3}{7}$$

ثم نعوض ذلك في المعادلة (٤) لنحصل على :

$$t = 4 - 4(\frac{3}{7}) - x$$

$$= \frac{16}{7} - x \qquad (٥)$$

والآن نعوض في المعادلة (٣) لينتج :

$$8 - 4x - 2(\frac{16}{7} - x) - \frac{3}{7} = 0$$

$$2x = 3$$

$$\therefore \quad x = \frac{3}{2}$$

والآن نعوض في المعادلة (٥) لينتج:

$$t = \frac{16}{7} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{11}{14}$$

ويلاحظ على هذا المثال انه يحتوي على (3) متغيرات مستقلة في حين ما تقدمه التحليلات الرياضية في مجال علم الاقتصاد قد اقتصر على متغيرين

وإن تناول ثلاثة متغيرات يحتاج إلى تحليلات معقدة فقد لا يكون من المناسب الدخول بها ضمن الإطار البسيط لهذا الكتاب وما يمكن أن نفعله هو أن نرشح النقاط المتطرفة التي حصلنا عليها لتكون نقاط عظمى بدليل أن النقاط التي حصلنا عليها هي :

$$w = \frac{3}{7}$$

$$t = \frac{11}{14} \quad \text{و}$$

$$x = \frac{3}{2} \quad \text{و}$$

تعطي ربحا أفضل مما تعطيه **x = 0** و **t = 0** و **w = 0** وعلى هذا الأساس فإن الربح الذي تحصل عليه الشركة يكون :

$$R = 4(\frac{3}{7}) - 2(\frac{3}{7})^2 + 5(\frac{11}{14}) - (\frac{11}{14})^2 + 8(\frac{3}{2}) - 2(\frac{3}{2})^2$$

$$= \frac{12}{7} - \frac{18}{49} + \frac{55}{14} - \frac{121}{196} + \frac{24}{2} - \frac{18}{4}$$

$$= \frac{2383}{196} = 12.2$$

$$C = 2(\frac{11}{14})(\frac{3}{2}) + (\frac{3}{7})(\frac{11}{14}) + (\frac{3}{2})(\frac{3}{7})$$

$$= \frac{66}{28} + \frac{33}{98} + \frac{9}{14} = \frac{654}{196} = 3.3$$

$$\therefore \quad \pi = R - C$$

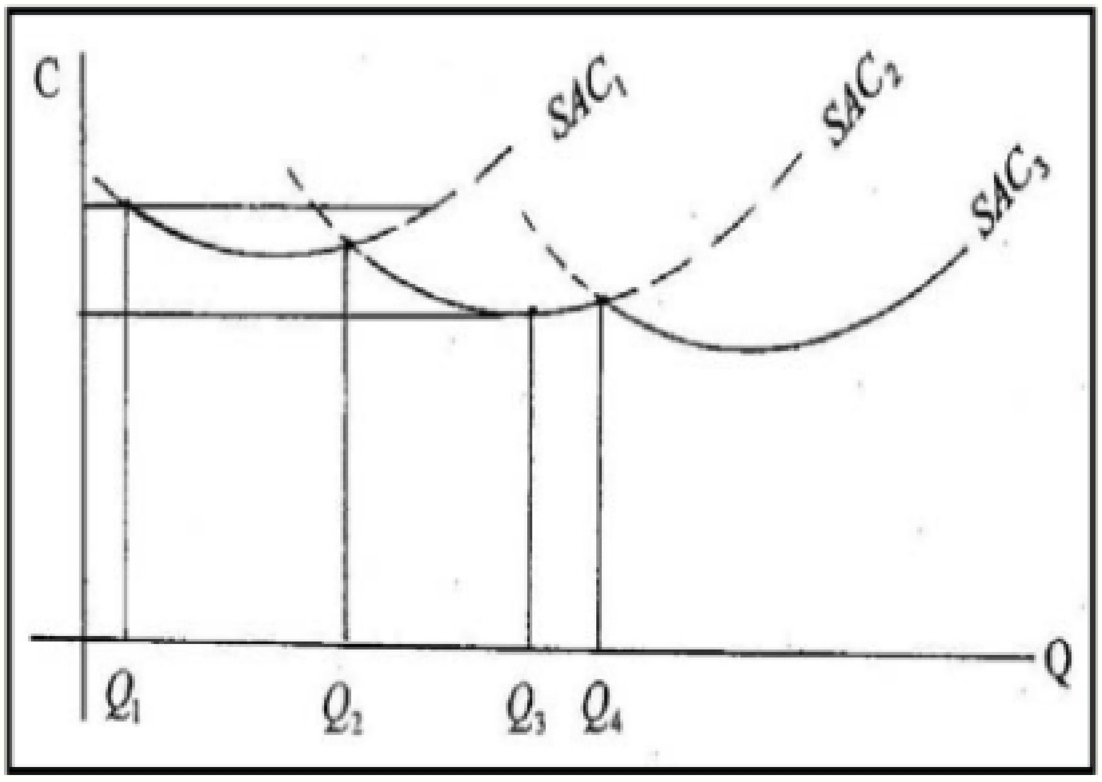
$$= 12.2 - 3.3$$

$$= 8.9$$

٥-١٤ دالة التكاليف في المدى الطويل Long – Run Cost Function

كما عرفنا سابقا" بان المدى الطويل هو الفترة التي يستطيع خلالها المنتج من تغيير عوامل الإنتاج. كما أن كلا من المنتج والمستهلك بعد أن تأخذ كل جوانب الفعالية الاقتصادية إبعادها في المدى القصير يستطيعان أن يختارا بعض من هذه الجوانب لوضع خطة الإنتاج في المستقبل . أي أن المدى الطويل يحتوي على كل ممكنات المدى القصير التي تصلح للفعاليات الاقتصادية المستقبلية.

ولتوضيح ذلك نفترض أن احد المنتجين في إحدى الصناعات يعمل بثلاثة مكائن صغيرة ومتوسطة وكبيرة وذلك طبقا لما هو متوفر من تكنولوجيا وفقا" لممكنات المدى القصير. وكل ماكنة تعمل بمنحني متوسط تكاليف خاص بها ولنرمز له بالحرف (SAC) أي منحني متوسط التكاليف في المدى القصير ولهذا فإن المكائن الثلاث تعمل بثلاث متوسطات للتكاليف هي (SAC_1, SAC_2, SAC_3) كما موضح في الشكل رقم (5-12).



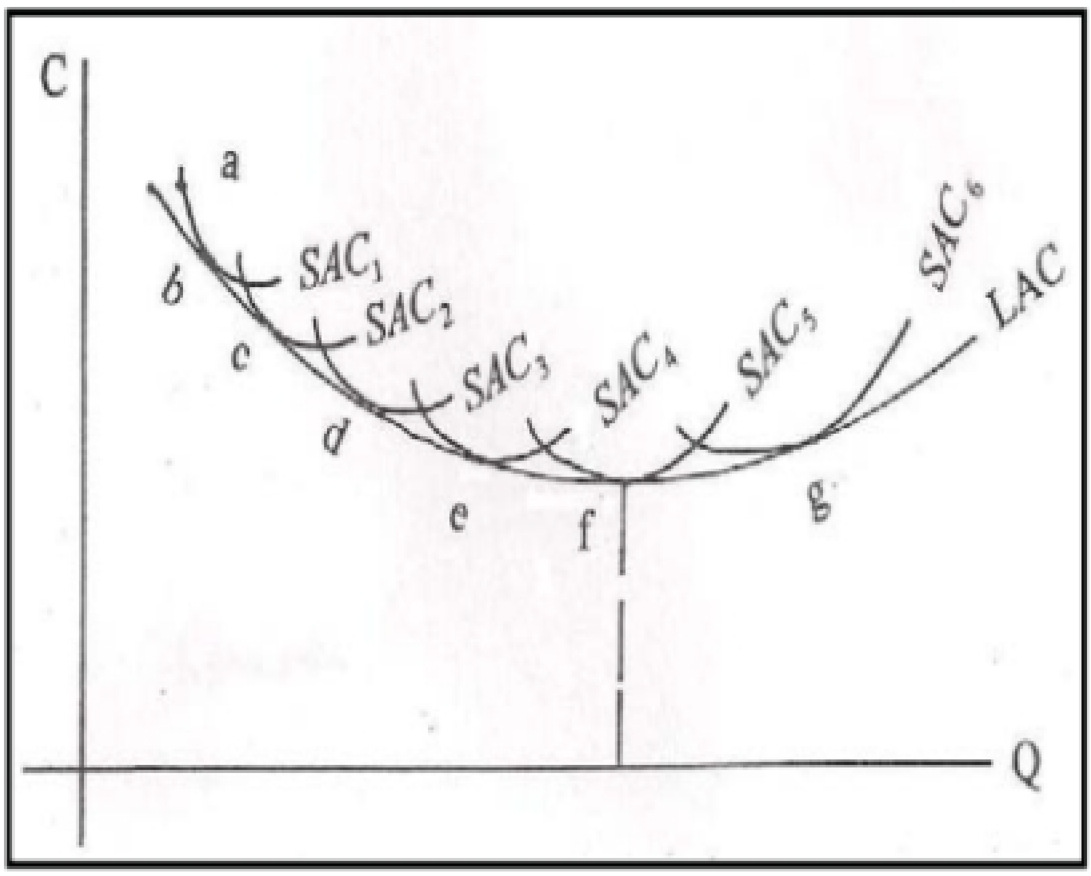
شكل رقم (١٢-٥)

ففي المدى الطويل يختار المنتج من بين هذه المكائن الثلاثة تلك الماكنة التي تعطيه في المدى القصير أفضل متوسط تكاليف من المتوسطات الثلاث. فإذا وجد أن (Q_1) من الإنتاج يعطيه أفضل الأرباح يختار الماكنة الأولى وإذا وجد أن (Q_2) يعطيه الأفضل من الأرباح يختار الماكنة الثانية أو يختار الماكنة الثالثة إذا كانت الأرباح أفضل. ومن هذه الخيارات التي عملت بها هذه الصناعة في المدى القصير يخطط المنتج لبناء ماكنة ذات حجم يحقق له خياره في الشكل رقم (5-12) أعلاه للجزء المتصل (غير المتقطع) من المنحنيات متوسط التكاليف ويدعى هذا المنحني بمنحني الغلاف (**envelope curve**) لكونه يحتوي (يغلف) كل منحنيات المدى القصير، ويظهر المنحني المذكور اقل وحدة تكاليف لأي إنتاج ممكن.

لقد افترضنا ثلاثة مكائن لغرض التبسيط في حين سيواجه المنتج خيارات عديدة أكثر بكثير من ذلك كل منها يمثل منحنى متوسط تكاليف تشكل كل مجموعة منها فروع من كل منحنى من المنحنيات الثلاثة في الشكل رقم (5-12).

قد يحتاج الأمر إلى إيضاح أكثر لذا دعنا نأخذ الشكل رقم (5-13) فإذا بدأ المنتج بالإنتاج وفق منحني تكاليف (SAC_1) فربما يجد أن النقطة (a) تحقق له مستوى تكاليف اقل للوحدة الواحدة من الإنتاج. ولكن الإنتاج يمكن توسيعه إلى الحجم الذي يتوافق مع

النقطة (b) التي تعتبر نقطة الحد الأدنى على منحنى متوسط التكاليف (SAC_1) وإذا ما توسع الطلب على منتجات هذا المصنع فيتوسع المنتج في الإنتاج مستهدفا أرباحا أكثر من خلال الإنتاج بتكاليف اقل للوحدة الواحدة وهذا ينقله إلى المنحني (SAC_2) محققا إنتاجا" أكثر بمتوسط التكاليف اقل لكل وحدة عند النقطة (c) وهكذا.



شكل رقم (١٣-٥)

ومن الأجزاء التي تمثل اقل متوسط تكاليف على منحنيات متوسط التكاليف في المدى القصير يتكون منحني متوسط التكاليف في المدى الطويل (LAC) ويبدو المنحني أملساً رغم تكونه من أجزاء كثيرة وذلك لكون عدد الخيارات كما أسلفنا كثيرة جدا" وكل خيار يستند على منحني متوسط تكاليف خاص به.

ويلاحظ من الشكل (13-5) أن منحنيات متوسط التكاليف في المدى القصير تتماس مع منحني متوسط التكاليف (LAC) ولكن ليس في نقاطها الصغرى ما عدا (SAC_2) كما يلاحظ أن درجة تقعر منحني (LAC) اقل من درجة تقعر منحنيات (SAC) وبذلك نكون قد توصلنا إلى التعرف على منحني (LAC) الذي يبدأ بالهبوط في المراحل الأولى ليصل عند أدنى مستوى له عند النقطة (f) وهي أيضاً" نقطة المستوى الأدنى في المرحلة الخامسة في المدى القصير ثم يواصل المنحني (LAC) الارتفاع في حالة توسع الإنتاج.

أما أفضل حجم إنتاج فإن ذلك يعتمد على عاملين أساسيين هما:

١- أسعار بيع المنتوج.

٢- التاليف الحدية في المدى الطويل.

إن استخراج التكاليف الحدية في المدى الطويل (LMC) ممكن من خلال معرفة ما يطرأ على التكاليف الكلية عبر الزمن من جراء تزايد وحدات المنتوج ولذلك فإن منحني (LMC) يسلك نفس سلوك منحني (MC) في الأجل القصير. أي أن منحني (LMC) يمر من خلال أدنى نقطة على (LAC). ولكي نواصل تحليل المنتج في المدى الطويل لابد من تناول دالة الإنتاج.

٥_١٥ التكاليف في المدى الطويل ودالة الإنتاج Long Run Cost and Production Function

قلنا بأن منحني متوسط التكاليف في المدى الطويل ما هو إلا أجزاء من منحنيات متوسط التكاليف في المدى القصير وان التكاليف في المدى الطويل ما هي إلا دالة لدالة الإنتاج ويمكن الوقوف على ذلك عن طريق اشتقاق دالة التكاليف في المدى الطويل مباشرة من دالة الإنتاج إذا كانت دالة الإنتاج معروفة لدينا كما مبين في أدناه :

نفترض بان لدينا دالة (كوب - دوكلاس) للإنتاج والتي تأخذ الصيغة التالية :

$$...Q = A\, x_1^b\, x_2^c \qquad (5\text{-}33)$$

حيث أن :

Q يمثل وحدات الإنتاج، x_1 , x_2 يمثلان الوحدات المستخدمة في الإنتاج.

أما A , b , c فهي ثوابت ذات دلالات فنية (تكنولوجية)

وإذا كانت الوحدة السعرية للمستخدم $x_1 = L$

والوحدة السعرية للمستخدم $x_2 = K$

وحيث أن المنتج في المدى الطويل يستطيع الوصول إلى مزيج المدخلات الذي يلبي شروط الكفاءة الاقتصادية أي المزيج الذي يتساوى فيه المعدل الحدي للاستبدال الفني [**Marginal Rate of Technical Substitution (MRTS)**] ونسبة المستخدم - السعر [**Input - Price Rotio (IPR)**] ولما كان:

$$IPR = \frac{L}{K} \quad \text{وإن} \quad MRTS = \frac{bx_2}{cx_1}$$

إذن يتطلب مزيج المدخلات الوصول إلى حالة تساوي كل من :

$$\ldots \frac{L}{K} = \frac{bx_2}{cx_1} \qquad (5\text{-}34)$$

وبأخذ لوغاريتم المعادلة (5-33) والمعادلة (5-34) على التوالي نحصل على :

$$\log Q = \log A + b \log x_1 + c \log x_2$$

$$\log L - \log K = \log b + \log x_2 - \log c - \log x_1$$

وبإعادة الترتيب ينتج :

١- $b \log x_1 + c \log x_2 = \log Q - \log A$

٢- $-\log x_1 + \log x_2 = \log c - \log b + \log L - \log K$

وبحل المعادلتين أنياً وذلك بضرب المعادلة الثانية في (b) وجمع المعادلتين نحصل على:

$$b \log x_2 + c \log x_2 = \log Q - \log A + b \log c - b \log b + b \log K - b \log l$$

وبإعادة الترتيب ينتج :

$$(b+c)\log x_2 = \log Q - \log A + b \log c - b \log b + b \log L - b \log L$$

$$\log x_2 = \frac{\log Q - \log A + b\log c - b\log b + b\log L - b\log K}{(b+c)}$$

$$\therefore X_2 = (QA^{-1}c^b b^{-b} L^b K^{-b}$$

$$\therefore x_2 = \left[\frac{Q}{A}\left(\frac{cL}{bK}\right)\right]^{\frac{1}{b+c}} \qquad (5\text{-}35)$$

وبنفس الطريقة إذا ضربت المعادلة الثانية في (c) وطرحت من الأولى نحصل على :

$$x_1 = \left[\frac{Q}{A}\left(\frac{bK}{cL}\right)^C\right]^{\frac{1}{b+c}}$$

(5-36)

$$\therefore x_1 = \left[\frac{Q}{A}\left(\frac{cL}{bK}\right)^{-C}\right]^{\frac{1}{B+C}}$$

وتشير قيمة (x_1 , x_2) في المعادلتين (36 -5)، (36 - 5) إلى كمية المستخدمات التي تلزم الإنتاج (Q) من وحدات الإنتاج عند اقل نسبة تكاليف (cost - minimizing input ration) المعطاة بالمعادلة (5-34).

دعنا نعطي لكل من (x_1 , x_2) رمزاً إضافياً لتميزها عن بقية المتغيرات وليكن الرمز (x_1*, x_2*).

ونشير هنا إلى أن لكل مستوى إنتاج (Q) هناك نقطة على المسار التوسعي للإنتاج هي x_1*/ x_2*.

ولما كانت دالة التكاليف لإنتاج (Q) من الوحدات بأعلى كفاءة هي :

$$(5\text{-}37)\ ...C = Lx_1{}^* + Kx_2{}^*$$

حيث أن كل من L , K هي الوحدات السعرية لكل من x_1 , x_2 كما ذكرنا أعلاه.

وبتعويض كل من المعادلتين (5-35),(36 - 5) في المعادلة (5-37) ينتج :

$$(5\text{-}38)\ \cdots C = K\left[\frac{Q}{A}\left(\frac{cL}{bK}\right)^b\right]^{\frac{1}{b+c}} + L\left[\frac{Q}{A}\left(\frac{cL}{bK}\right)^{-c}\right]^{\frac{1}{b+c}}$$

وبتوسيع المقدار الثاني في العلاقة (38-5) وذلك بضربه وقسمته على

$$\left[\left(\frac{cL}{bK}\right)^{b+c}\right]^{\frac{1}{b+c}}$$

ينتج :

$$L\left[\frac{Q}{A}\left(\frac{cL}{bK}\right)^{-C}\right]^{\frac{1}{b+c}}=\frac{L\left(\frac{Q}{A}\left(\frac{cL}{bK}\right)^{-c}\left(\frac{cL}{bK}\right)^{b+c}\right)^{\frac{1}{b+c}}}{\left[\left(\frac{cL}{bK}\right)^{b+K}\right]^{\frac{1}{b+c}}}$$

$$=\frac{L\left[\frac{Q}{A}\left(\frac{cL}{bK}\right)^{b}\right]^{\frac{1}{b+c}}}{\left(\frac{cL}{bK}\right)}$$

$$=\frac{bK}{c}\left[\frac{Q}{A}\left(\frac{cL}{bK}\right)^{b}\right]^{\frac{1}{b+c}} \qquad (5-39)$$

نعيد تعويض المعادلة (39-5) في المعادلة (38-5) ينتج :

$$C=K\left(\frac{Q}{A}\left(\frac{cL}{bK}\right)^{b}\right)^{\frac{1}{b+c}}+\frac{bK}{c}\left(\frac{Q}{A}\left(\frac{cL}{bK}\right)^{b}\right)^{\frac{1}{b+c}}$$

وبإخراج : $\left(\frac{Q}{A}\left(\frac{cL}{bK}\right)^{b}\right)^{\frac{1}{b+c}}$ كعامل مشترك نختصر فنحصل على :

$$C=K\left(\frac{b+c}{c}\right)\left[\frac{Q}{A}\left(\frac{cL}{bK}\right)^{b}\right]^{\frac{1}{b+c}} \qquad (5-40)$$

وحيث أن كل من (A , b ,c) هي معاملات فنية و (K , L) هي وحدات أسعار معطاة لهذا فإن الدالة (40-5) تبقى دالة فقط لمستوى الإنتاج (Q) أي أن c = f

(Q) مع ملاحظة عدم وجود ثابت في الدالة يمثل التكاليف الثابتة لان المنتج في المدى الطويل يمكن أن يجري كل التعديلات المرغوبة في الإنتاج ليصل به إلى المستوى الأمثل من خلال الوصول إلى أفضل مزيج بعد تحول جميع المدخلات إلى مدخلات متغيرة في المدى الطويل.

نستخلص من ذلك أن دالة التكاليف في المدى الطويل هي : c = f(q)

ويمكن استخراج (MC) بأخذ المشتقة الأولى ل f (Q) مع الإشارة إلى أن (MC) في المدى الطويل هي ليست حصيلة لمنحنيات (MC) في المدى القصير بل هي معدل التغير في التكاليف المتغيرة في المدى الطويل حيث يفترض كون جميع التكاليف متغيرة.

لنأخذ المثال التوضيحي الآتي :

مثال :

أعطيت دالة الإنتاج على طراز (كوب دوكلاص) الآتية :

$$Q = 15x_1^{0.2}x_2^{0.8}$$

وكانت دالة التكاليف للإنتاج بأعلى كفاءة هي :

$$C = 5x_1 + 8x_2$$

بين بأن دالة التكاليف ما هي إلا دالة ل (Q) وهي دالة تكاليف في المدى الطويل.

الجواب :

نأخذ العلاقة (5-40) وهي :

$$C = K\left(\frac{b+c}{c}\right)\left[\frac{Q}{A}\left(\frac{cL}{bK}\right)^{b}\right]^{\frac{1}{b+c}}$$

ودعنا نستحضر القيم الآتية المعطاة في المسألة :

$$A = 15, b = 0.2, c = 0.8, L = 5, K = 8$$

$$C = 8\left(\frac{0.2+0.8}{0.8}\right)\left[\frac{Q}{15}\left(\frac{0.8(5)}{0.2(8)}\right)^{0.2}\right]^{\frac{1}{0.2+0.8}}$$

والآن :

$$= 8(1.25)\left[\frac{Q}{15}(1.2)\right]$$

$$= 10(0.08)Q$$

$$= 0.8Q$$

ومن الناتج نستنتج بأن $c = f(Q)$ وهي دالة خطية لا يوجد فيها الثابت (A) مما يشير إلى كونها دالة طويلة الأمد.

تمارين (٣-٥)

١- لدينا دالة التكاليف الآتية :

$$c = 10 + 2x^2 + 3x$$

والمطلوب إيجاد :

أ) متوسط التكاليف الثابتة والمتغيرة والكلية.

ب) انحدار كل من المتوسطات الثلاثة أعلاه.

٢- أوجد التكاليف الحدية في الدالة الآتية :

$$C = 5x^2 - 3x$$

٣- وجد أحد الباحثين بأن دالة التكاليف في إحدى المشاريع هي:

$$C = 20 + x^2 - 2x$$

والمطلوب أيجاد :

أ) متوسط التكاليف والتكاليف الحدية.

ب) إثبات أن متوسط التكاليف يساوي التكاليف الحدية عندما يكون منحنى متوسط التكاليف في أدنى نقطة.

٤- كانت دالة الطلب على القماش الحريري والقماش الصوفي من إحدى مشاريع النسيج كما يأتي:

$$s = 5 - 3x$$

$$w = 2 - 2y$$

حيث أن (s) و(w) هي حجم الطلب على القماش الحريري والقماش الصوفي على التوالي. و (x) و(y) هي أسعار القماش الحريري والقماش الصوفي على التوالي وقد كانت دالة التكاليف المشتركة لهذين المنتوجين هي: $c = 4s + w$

والمطلوب:

أيجاد الكميات التي يتعين إنتاجها وبيعها في السوق من هاتين السلعتين لكي تستطيع الشركة من تحقيق أعظم الأرباح.

٥- إذا كانت دالة الإنتاج في مصنع الزيوت من نوع كوب- دوكلاص وبالصيغة الآتية :

$$Q = bx_1^{0.4}x_2^{0.6}$$

وكانت دالة التاليف عندما يكون الإنتاج في مستوى الكفاءة الأعلى هي :

$$c = 2x_1 + 5x_2$$

برهن على أن دالة التكاليف هي دالة ل (Q) وهي دالة تكاليف للأمد الطويل.

رابعاً - في نظرية الإنتاج On the Theory of Production

١٦_٥ إدارة الإنتاج production Function

هي العلاقة بين الإنتاج (**output**) وبين المدخلات (**inputs**) التي ساهمت فيه. إنها العلاقة التي توضح الكميات المنتجة كدالة لعوامل الإنتاج.

وتساعد دالة الإنتاج متخذي القرارات في رسم السياسة الإنتاجية التي تتأثر بها كل من أسواق الإنتاج وأسواق عوامل الإنتاج معاً.

وتكتب دالة الإنتاج بصورتها البسيطة كالآتي :

$$...Q = f(x_i), \quad i = 1,2,....,n \qquad (5\text{-}41)$$

حيث أن (x_i) هي المدخلات (عوامل الإنتاج). والعلاقة (5-41) بشكلها الخطي تكتب كما يلي :

$$...Q = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n \qquad (5\text{-}42)$$

حيث أن (a_i) هي معاملات فنية تبين لنا كم سيزداد الإنتاج (Q) إذا زيدت إحدى (المدخلات) (x_i) بوحدة واحدة شريطة أن تبقى المستخدمات الأخرى ثابتة.

لنأخذ مثالا توضيحيا:

مثال :في معمل للنسيج الصوفي قدرت دالة الإنتاج بما يلي :

$$Q = 0.3x_1 + 0.5x_2 + 0.6x_3$$

حيث أن :

x_1 تمثل العمل و x_2 المواد الأولية و x_3 المكائن والمعدات.

بكم سيزداد الإنتاج إذا زيدت المواد الأولية بمقدار (10) وحدات مع ثبات العوامل الأولية الأخرى (x_1 , x_3).

<u>الجواب :</u>

إذا بقت x_1 , x_3 ثابتة فإن الإنتاج سيزداد بمقدار يعتمد على قيمة (a_2 =0.5):

$$\therefore \Delta q = 0.5\Delta x_2 = 0.5(10) = 5$$

أو: $\frac{dQ}{dx_2} = 0.5$

$$\therefore dQ = 0.5dx_2 = 0.5(10) = 5$$

٥_١٧ دوال الإنتاج الخطية المتجانسة
Homogenous Production Function

٥-١٧-١ الدالة المتجانسة Homogenous Function

تعرف الدالة المتجانسة بأنها الدالة التي إذا حدث أي تغير نسبي في المتغيرات المستقلة فيها سيؤدي إلى تغير نسبي مرفوع إلى قوة معينة في المتغير التابع. فالدالة المتجانسة من الدرجة (n) هي الدالة التي إذا ضربت جميع المتغيرات المستقلة فيها بالثابت (λ) يؤدي إلى ضرب قيمة الدالة بالثابت (λ) نفسه مرفوع إلى قوة n.

فإذا كانت $x = f(y,z)$ فإن:

$$\lambda^{n} x = f(\lambda y, \lambda z) \quad \text{(5-43)}$$

حيث أن :

λ أي مقدار ثابت يمثل التغير النسبي في عناصر هذه الدالة. وان الدالة (5-43) هي دالة متجانسة درجتها تساوي القوة المرفوعة لها λ.

<u>مثال:</u>

خذ الدالة :

$$\begin{aligned} Q &= f(x, y) \\ &= 2x^3y^2 + 3x^2y^3 \end{aligned}$$

وادخل λ على كل متغير في الطرف الأيسر منها باعتباره التغير النسبي الذي يصيب كل واحد من المتغيرات المستقلة لهذا الطرف أي أن :

$$\begin{aligned} &2(\lambda x)^3(\lambda y)^2 + 3(\lambda x)^2(\lambda y)^3 \\ &= 2\lambda^5x^3y^2 + 3\lambda^5x^2y^3 \\ &= \lambda^5(2x^3y^2 + 3x^2y^3) \\ &= \lambda^5 q \end{aligned}$$

∴ الدالة المذكورة دالة متجانسة من الدرجة الخامسة.

على سبيل المثال إذا ضاعفنا قيمة كل من x , y أي أحدثنا تغيرا نسبيا مقداره $\lambda = 2$ فسيؤدي هذا يؤدي إلى مضاعفة (Q) بمقدار (مرة $32 = 2^5 = \lambda^5$) وإذا افترضنا أن x , y في المثال أعلاه كانت (4, 1) على التوالي فإن قيمة الدالة تكون :

$$q = 2x^3y^2 + 3x^2y^3$$

$$= 2(1)^3(4)^2 + 3(1)^2(4)^3$$

$$= 32 + 192 = 224$$

والآن إذا ضاعفنا قيمة كل من x , y فإن قيمة الدالة تكون :

$$q = 2(2\times1)^3(2\times4)^2 + 3(1\times2)^2(2\times4)^3$$

$$= 1024 + 6144 = 7168$$

وبطريقة أخرى فإنه يساوي :

$$q\lambda^5 = 224\times2^5 = 7168$$

أي أن زيادة عوامل الإنتاج في هذه الدالة بمقدار الضعف يؤدي إلى زيادة الإنتاج بمقدار الضعف مرفوع إلى قوة (5) أي بمقدار (λ^5) لان الدالة متجانسة من الدرجة الخامسة.

وعموماً ليست جميع الدوال متجانسة ذلك لإمكانية تحويل أية دالة متجانسة إلى دالة غير متجانسة وذلك بإضافة ثابت لها، فالدالة في المثال أعلاه يمكن تحويلها إلى دالة غير متجانسة بإضافة (a) كمقدار ثابت لتصبح :

$$Q = 2x^3y^2 + 3x^2y^3 + a$$

فعند ضرب كل من (x , y) في ثابت مثل λ فإن النتيجة لا تساوي Q مضروبة في λ لان الثابت (a) لم يتغير عند تغير قيمة (x , y)، ولهذا تتميز الدالة المتجانسة بان قيمتها تساوي صفرا" عندما تكون قيمة جميع المتغيرات تساوي صفرا" أيضاً.

$$f(0,0) = 0$$

٢-١٧-٥دالة الإنتاج الخطية المتجانسة

Homogenous Linear Production Function_

تكون الدالة المتجانسة خطية أي أذا توسعت عوامل الإنتاج (inputs) بنسبة معينة فإن الإنتاج يتوسع بنفس النسبة.

مثال:

ما هي درجة تجانس الدالة الآتية :

$$x = \sqrt{ay^2 + bz^2 + 2cyz}$$

حيث أن a , b , c ثوابت و y , z متغيرات.

الجواب :

نضرب (كل متغير في الطرف الأيسر من الدالة بالمقدار (λ) لنحصل على :

$$= \sqrt{a(\lambda y)^2 + b(\lambda z)^2 + 2c(\lambda y)(\lambda z)}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 ay^2 + \lambda^2 bz^2 + \lambda^2 2cyz}$$

$$= \sqrt{\lambda^2(ay^2 + bz^2 + 2cyz)}$$

$$= \lambda\sqrt{ay^2 + bz^2 + 2cyz}$$

$$= \lambda x$$

وحيث أن القوة (λ) هي (1) إذن الدالة : $x = \sqrt{ay^2 + bz^2 + 2cyz}$ هي دالة خطية متجانسة أي درجتها (1)، ومن ذلك نستنتج بان ضرب المتغيرات المستقلة في عدد مثل (λ) يؤدي إلى نفس التغير في قيمة الدالة أي بمقدار (λ) أيضاً" ولو كانت درجة الدالة أكثر من (1) ولنفترض (3) أي من الدرجة الثالثة لأدى ضرب المتغيرات المستقلة ب (λ) إلى تغير قيمة الدالة ب (λ^3)

مثال (٢):

اوجد درجة تجانس الدالة الآتية :

$$q = 3x + 9y$$

الجواب :

نأخذ الطرف الأيسر ونجري تغييرا على كل من (x , y) بمقدار (λ) ينتج :

$$3\lambda x + 9\lambda y$$

$$= \lambda(3x + 9y)$$

$$= \lambda q$$

∴ الدالة متجانسة من الدرجة الأولى أي أنها خطية التجانس وأن تغير كل من x , y بنسبة مقدارها λ أدى إلى تغير q بالنسبة ذاتها.

مثال (٣) :

اوجد درجة تجانس الدالة الآتية :

$$Q = x^7 + x^2y^5 + x^3y^4 + y^7$$

الجواب :

نضرب كل متغير في الطرف الأيسر ب(λ) فنحصل على :

$$(\lambda x)^7 + (\lambda x)^2(\lambda y)^5 + (\lambda x)^3(\lambda y)^4 + (\lambda y)^7$$

$$= \lambda^7(x^7 + x^2y^5 + x^3y^4 + y^7)$$

$$= \lambda^7 q$$

∴ الدالة متجانسة من الدرجة السابعة أي أنها غير خطية التجانس.

مثال (٤):

ما هي درجة تجانس الدالة الآتية :

$$Q = \frac{xy}{z} + 2z + \frac{z^3}{xy} + \frac{5y^2}{2x} + 3y$$

الجواب :

نجري على كل من (x , y , z) في الطرف الأيسر تغيرا بمقدار (λ) فنكون النتيجة ما يأتي:

$$\frac{(\lambda x)(\lambda y)}{(\lambda z)} + 2(\lambda z) + \frac{(\lambda z)^3}{(\lambda x)(\lambda y)} + \frac{5(\lambda y)^2}{2(\lambda x)} + 3(\lambda y)$$

$$= \frac{\lambda(xy)}{z} + 2\lambda z + \frac{\lambda z^3}{xy} + \frac{5\lambda y^2}{2x} + 3\lambda y$$

$$= \lambda[\frac{xy}{z} + 2z + \frac{z^3}{xy} + \frac{5y^2}{2x} + 3y]$$

$$= \lambda q$$

∴ الدالة متجانسة من الدرجة الأولى أي أنها خطية التجانس.

١٨ـ٥ الدالة المتجانسة وقاعدة أويلر
Homogenous Function and Eulers Theorem

تتميز الدوال الخطية المتجانسة بثلاث خصائص رئيسية الأولى و الثانية تؤدي إلى الثالثة وهذه الخصائص تعرف بنظرية اويلرنسبة إلى ليونهارد اويلر (Leonhard Euler) العالم الرياضي السويسري (١٧٠٧-١٧٨٣). وتعتبر هذه النظرية حجز الزاوية في المفاهيم الأولية لنظرية الإنتاج والتوزيع التي تناولها في الشرح والتفسير كل من فالراس (L. walras) /[(٢)١*] وكلارك (J. B.clark)/[(٣)٢*] بعد حين من الزمن.

- 2 \1* L.Walras : ليون فالراس (١٨٣٤-١٩١٠) أستاذ الاقتصاد في جامعة لوزان (سويسرا) من أهم انجازاته المنفعة الحدية والتوازن.
- 3 \2* J B Clark : جون كلارك (١٨٤٧-١٩٣٨) تخرج من جامعة زيورخ وشغل منصب أستاذ الاقتصاد في جامعة كولومبيا أهم انجازاته في نظريه الإنتاجية الحدية.

إن الخصائص الثلاثة هي :

٥- إذا كانت لدينا الدالة : $z = f(x, y)$

فإن هذه الدالة يمكن كتابتها أما بالصيغة الآتية : $z = xv(\frac{y}{x})$

أو بالصيغة الآتية : $z = yg(\frac{x}{y})$

٦- المشتقة الجزئية لكل من fx , fy هي دالة لـ $\frac{y}{x}$

٧- أما الخاصية الأخيرة فهي :

$$Z = X\frac{\partial Z}{\partial X} + Y\frac{\partial Z}{\partial Y}$$

ويمكن توضيح الخاصية الأولى والثانية كالآتي :-

حسب فرضية التجانس الخطي فإن:-

$$(5\text{-}44)\ldots f(\lambda X, \lambda Y) = \lambda f(X, Y)$$

وإذا ما أُستخدمنا بدلاً من قيمة λ قيمة أخرى هي $\frac{1}{X}$ على افتراض أن $(\lambda = \frac{1}{X})$ وعوضنا ذلك في المعادلة(5-44) فإن النتيجة تكون :

$$f\left(1, \frac{Y}{X}\right) = \frac{1}{X} f(X, Y)$$

وبضرب كلا الطرفين بـ X مع ملاحظة أن الرقم (1) هو ثابت نحصل على :

$$xf\left(\frac{y}{x}\right) = f(x, y)$$

$$(5\text{-}45)\ldots z = xv\left(\frac{y}{x}\right) = f(x, y)$$

أو:

ونفس النتيجة يمكن الحصول عليها إذا استخدمنا $(\lambda = \frac{1}{y})$ وهي :

$$(5\text{-}46)\ldots z = yg\left(\frac{x}{y}\right)$$

وهذه هي الخاصية الأولى:

أما الخاصية الثانية فيمكن توضيحها بما يأتي:

خذ المشتقة الجزئية للدالة z حسب العلاقة (5-45) بالنسبة للمتغير x ينتج :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = v\left(\frac{y}{x}\right) + xv'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= v\left(\frac{y}{x}\right) + xv'\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{-y}{x^2}\right)$$

$$(5\text{-}47)\ldots \therefore \frac{\partial z}{\partial x} = v\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}v'\left(\frac{y}{x}\right)$$

وواضح أن $\frac{\partial z}{\partial x}$ هي دالة لكل من .(x , y).

وبنفس الطريقة فإن المشتقة الجزئية للدالة z حسب العلاقة (5-45) بالنسبة لـ y هي :-

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xv'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= xv'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}$$

$$= \frac{x}{x}v'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$(5\text{-}48) \qquad = v'\left(\frac{y}{x}\right)$$

وإن كلاً من (5-47) و (5-48) هي دالة لـ $\left(\frac{y}{x}\right)$ وهذه الخاصية الثانية أما بالنسبة للخاصية

الثالثة فإنها :

نضرب العلاقة (5-47) في (x) والعلاقة (5-48) في (Y) على التوالي فنحصل على:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}=x\left[v\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}v'\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

$$(5\text{-}49)\quad ...=xv\left(\frac{y}{x}\right)-yv'\left(\frac{y}{x}\right)$$

و $$y\frac{\partial z}{\partial y}=y\left[v'\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

$$(5\text{-}50)\quad ...=yv'\left(\frac{y}{x}\right)$$

وبجمع العلاقتين (5-49)، (5-50) ينتج :-

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xv\left(\frac{y}{x}\right)-yv'\left(\frac{y}{x}\right)+yv'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$=xv\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$=z$$

أي أن : $z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$

مثال :

استخدم نظرية اويلر لغرض قياس درجة تجانس الدالة الآتية :-

$$Q=XY+X^2+Y^2$$

الجواب :

نتبع الخطوات الآتية :-

ت) نجد المشتقة الجزئية للدالة Q بالنسبة لكل من (X,Y) على التوالي:

$$\frac{\partial Q}{\partial X}=Y+2X$$

$$\frac{\partial Q}{\partial Y} = X + 2Y$$

٢- نضرب المشتقة الأولى بـ X والمشتقة الثانية بـ Y فنحصل على:

$$X\frac{\partial Q}{\partial X} = X(Y + 2X)$$

$$= XY + 2X^2$$

$$Y\frac{\partial Q}{\partial Y} = Y(X + 2Y)$$

$$= XY + 2Y^2$$

٣- نجمع الدالتين كما يأتي :-

$$X\frac{\partial Q}{\partial X} + Y\frac{\partial Q}{\partial Y} = (XY + 2X^2) + (XY + 2Y^2)$$

$$= 2X^2 + 2XY + 2Y^2$$

$$= 2Q$$

٤- الدالة Q دالة متجانسة من الدرجة الثانية.

مثال (٢) :

اوجد درجة تجانس الدالة الآتية باستخدام نظرية اويلر :

$$Q = 2X + 7Y$$

الجواب :

نتبع الخطوات الموضحة في المثال السابق:

$$\frac{\partial Q}{\partial X} = 2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial Y} = 7$$

ويضرب المشتقتين في (X,Y) على التوالي نحصل على :

$$X\frac{\partial Q}{\partial X} = 2x$$

و

$$Y\frac{\partial Q}{\partial Y} = 7Y$$

وبجمع الدالتين:

$$X\frac{\partial Q}{\partial X} + Y\frac{\partial Q}{\partial Y} = 2X + 7Y$$

$$= 1(Q)$$

الدالة Q خطية متجانسة.

وهذا واضح لو اتبعنا الطريقة البديلة وكالآتي:

نضرب الطرف الأيسر في λ فنحصل على:

$$2(\lambda X) + 7(\lambda Y)$$

$$= \lambda(2X + 7Y)$$

$$= \lambda Q$$

وحيث أن درجة λ هي (1) إذن الدالة خطية متجانسة.

تمارين (٤-٥)

- **إذا كانت دالة الإنتاج في إحدى المصانع من النوع التالي :**

$$x = ay^2 + bz + syz^2$$

جد درجة التجانس هذه الدالة.

- **خذ دالة الإنتاج الآتية :**

$$Q = 6x_1 + 3x_2$$

ما هي درجة تجانسها؟

• **إذا أعطيت دالة الإنتاج الآتية :**

$$Q = x^3 + y^2 + 2x$$

أستخدم نظرية أويلر لقيس درجة تجانس هذه الدالة.

• **كانت دالة الإنتاج بالصيغة الآتية :**

$$Q = \frac{8}{x^2} + \frac{12}{y} + \frac{10}{xy}$$

أوجد درجة تجانس هذه الدالة باستخدام الطريقة الاعتيادية أولا" ونظرية أويلر ثانيا" وحدد الخصائص الثلاثة الأخرى التي تتضمنها هذه النظرية بشأن ذلك.

٥ـ١٩ الدالة المتجانسة وحجم الغلة
Homogeneous Function and Return to Scale

تعريف:

يعرف حجم الغلة بأنة الحجم الذي يبين لنا مقدار التغير النسبي في الإنتاج إذا حدث تغير نسبي في المستخدمات.

فإذا كان التغير النسبي في الإنتاج بنفس التغير النسبي في المستخدمات قيل أن الإنتاج يمر بمرحلة الغلة الثابتة. أما إذا كان التغير النسبي في الإنتاج اكبر من التغير النسبي في المستخدمات فإن الإنتاج يمر في مرحلة الحجم المتزايد وبالعكس إذا كان التغير النسبي في الإنتاج اقل من التغير النسبي في المستخدمات فإن الإنتاج يمر في مرحلة الحجم المتناقص.

ويكون تمثيل ذلك بالعلاقة الرياضية التالية :-

إذا كانت لدينا دالة الإنتاج :-

$$Q = f(K, L)$$

حيث أن :-

Q : تمثل الإنتاج

K : رأس المال

L : العمل

فإن: $$f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^n f(K, L) \quad \ldots (5\text{-}51)$$

حيث أن (n) أي مقدار ثابت، λ أي عدد حقيقي موجب.

فإذا زيد كل من المستخدمين الإنتاجيين (K,L) بمقدار λ فإن الإنتاج سيزداد بالمقدار λ^n وعندئذ نلاحظ الحالات التالية :-

إذا كانت $n > 1$ فإن الإنتاج يمر بمرحلة الحجم المتزايد للغلة.

وإذا كانت $n = 1$ فإن الإنتاج يمر بمرحلة الحجم الثابت للغلة.

أما إذا كانت $n < 1$ فإن الإنتاج يمر بمرحلة الحجم المتناقص للغلة.

إن أكثر الدوال الإنتاجية التي تناولها الاقتصاديون تتركز على دالة الإنتاج المتجانسة من الدرجة الأولى أي (الخطية).

مثال :

خذ الدالة الآتية :

$$Q = 4K^{0.2}L^{0.5}$$

جد حجم الغلة الذي تقدمه هذه الدالة.

الجواب :

خذ الطرف الأيمن وعند ضربه بـ λ نحصل على :

$$4(\lambda k)^{0.2}(\lambda L)^{0.5}$$

$$= \lambda^{0.2+0.5}4(k^{0.2}L^{0.5})$$

$$= \lambda^{0.7}Q$$

إذن: $n<1$

ومن ذلك نستنتج أن الإنتاج يمر بمرحلة الإنتاج المتناقص للغلة.

٥-٢٠ منحنيات الإنتاجية Productivity Curves

٥-٢٠-١ الإنتاجية الكلية

إذا كانت لدينا دالة الإنتاج الآتية :-

$$...Q = f(X_1, X_2) \qquad (5\text{-}52)$$

فإن مقدار مساهمة (x_1) في إنتاج (Q) يمكن تعريفها بأنها : كمية (Q) التي بالمستطاع تحقيقها من جراء استخدام وحدات معينة من العامل الإنتاجي (x_1) بافتراض بقاء (x_2) ثابتة.

ولنوضح ذلك دعنا نوشح (x_2) بالعلامة (*) لتعني ثبات هذا العامل وبذلك تصبح العلاقة (52-5) كما يأتي :

$$Q = f(x_1, x_2^*) \qquad (5\text{-}53)$$

ومن ملاحظة الدالة (5-53) يتوضح لنا أن افتراضنا ثبات X_2 قد قلص الدالة Q لتصبح دالة للمتغير X_1 فقط.

<u>مثال :</u>

خذ دالة الإنتاج الآتية :

$$Q = 0.3X_1 + 0.14X_2$$

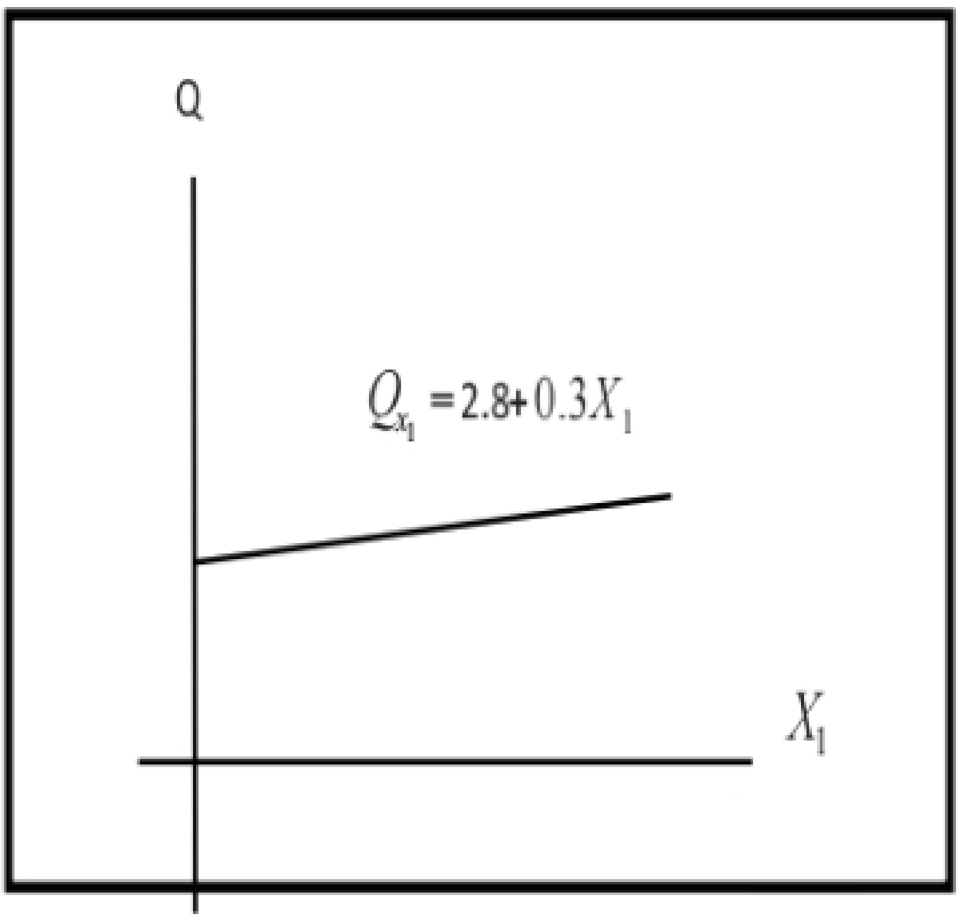
حيث أن Q تمثل مستوى الإنتاج أما X_1, X_2 فتمثلان العمل ورأس المال على التوالي.

وإذا افترضنا ثبات رأس المال X_2 عند (20) وحدة فإن الدالة ستصبح كالآتي :-

$$Q_{x_1} = f(X_1, X_2^*) = 0.3X_1 + 0.14(20)$$

$$= 0.3X_1 + 2.8$$

كما في الشكل رقم (14-5)



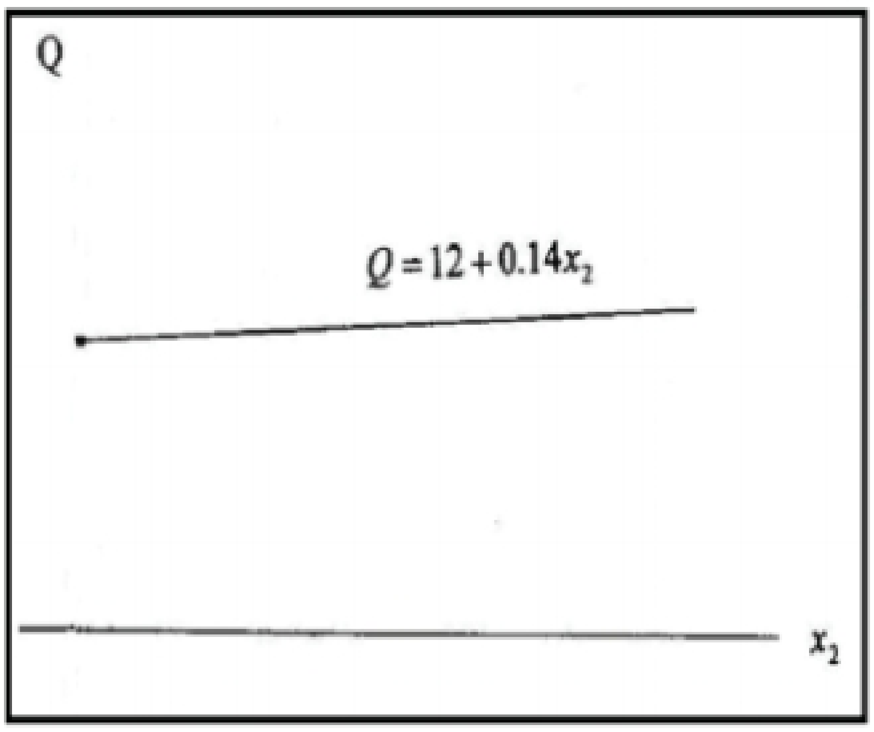
شكل رقم (٥-١٤)

وبالعكس إذا افترضنا ثبات العمل : X_1 عند مستوى مقداره **40** وحدة فإن الدالة ستؤول إلى :

$$Q_{X_2} = f(X_1^*, X_2) = 0.3(40) + 0.14X_2$$

$$= 12 + 0.14X_2$$

كما في الشكل رقم (5-15)



شكل رقم (٥-١٥)

٥-٢٠-٢ متوسط الإنتاجية (AP) Average Productivity

يعرف متوسط إنتاجية أي عامل إنتاجي بأنه إنتاجيته الكلية مقسومة على كمية المستخدم منه في تلك العملية الإنتاجية.

فإذا كانت لدينا دالة إنتاج فيها العامل X_2 ثابت كما يلي :-

$$Q = f(X_1, X_2^*)$$

$$\ldots \overline{Q}_{X_1} = AP = \frac{Q}{X_1} = \frac{f(X_1, X_2^*)}{X_1} \qquad (5\text{-}54)$$

<u>مثال :</u>

في إحدى المصانع كانت دالة الإنتاج كآلاتي :-

$$Q = f(X_1, X_2) = 0.2X_1 + 0.8X_2$$

وقد ثبتت إدارة المصنع مستوى العامل الإنتاجي (X_1) عند (10) وحدات، فما متوسط إنتاجية العامل الإنتاجي (X_2).

<u>الجواب</u>

إذا كان $(X_1 = 10)$ فإن الدالة تؤول إلى :

$$Q = f(X_1^*, X_2) = 0.2(10) + 0.8X_2$$

$$= 2 + 0.8X_2$$

$$AP_{X2} = \frac{Q}{X_2} = \frac{2 + 0.8X_2}{X_2}$$

$$= \frac{2}{X_2} + 0.8$$

٥-٢٠-٣ الإنتاجية الحدية (MP) Marginal Productivity

تعرف الإنتاجية الحدية بأنها مقدار الزيادة في الإنتاج المتأنية من الزيادة في كمية المستخدمات بوحدة واحدة وهذه يعني إيجاد المشتقة الجزئية للدالة (5-45) والتي هي:

$$Q = f(X_1, X_2)$$

الإنتاجية الحدية للعامل MP_{x_1} تساوي:

$$MP_{x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x_1} = f'(x_1, x_2^*) \qquad (5\text{-}55)$$

أما الإنتاجية الحدية للعامل MP_{x_2} فتساوي :

$$MP_{x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_2} = f'(x_1^*, x_2) \qquad (5\text{-}56)$$

ملاحظة:

سنتناول أمثلة توضيحية بعد الاستعراض المفاهيمي لهذه الدوال.

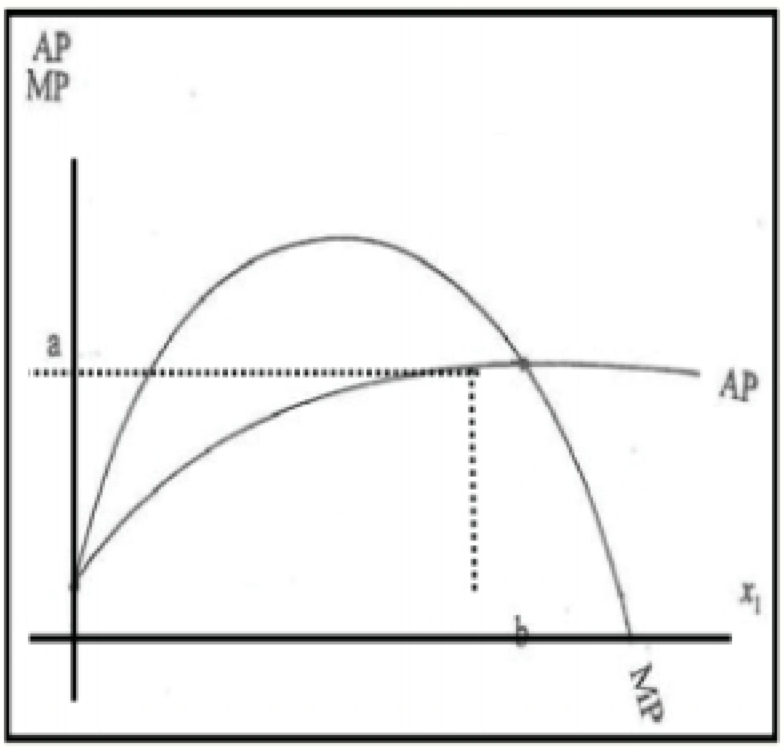
٥-٢٠-٤ متوسط الإنتاج (AP) والإنتاجية الحدية (MP)

خذ الدالة:

$$Q = f(x_1, x_2^*)$$

وباستخراج المنحنين (AP) و (MP) وتمثيل ذلك بيانياً نلاحظ أن المنحنين يشرعان بالارتفاع ويستمران على ذلك وبعدها يميلان نحو الانخفاض كلما توسعنا في استخدام المزيد من (x_1). ولكن لكل منحنى سلوك خاص به.

فالمنحنى (MP) يبدأ بالارتفاع بمعدل أسرع من المنحنى (AP) ولكنه يصل إلى أعظم نقطة له (Maximum) في الوقت الذي لا يزال (AP) يتجه نحو الارتفاع. ثم يميل (MP) إلى الانخفاض (أي بانحدار سالب) إلى أن يقطع (AP) عند النقطة التي يكون فيها (AP) عند أقصاه (أي عند النقطة العظمى) ثم ينحدر (MP) بسرعة ليقطع المحور (x_1) قبل أن يصله (AP) وذلك كما في الشكل (5-16).



شكل رقم (١٦-٥)

وعندما يتقاطع (AP) مع (MP) يكون(0-a)=AP=MP و (0-b)=x_1 :

خذ العلاقة (5-54) ومنها نستخرج :

$$\overline{Q}_{x_1} = f(x_1, x_2^*) \quad \text{(منحنى متوسط الإنتاج)}$$

ولاستخراج القيمة المتطرفة لهذا المنحنى (ونعني بها النقطة العظمى هنا) يلزم إيجاد المشتقة الأولى للدالة ثم ندع هذه المشتقة تساوي صفراً وذلك:

$$\frac{\partial \overline{Q}_{x_1}}{\partial x_1} = \frac{x_1 f'(x_1, x_2^*) - f(x_1, x_2^*)}{x_1^2} \qquad (5\text{-}57)$$

(ويلاحظ أنها مشتقة حاصل قسمة دالتين).

وكما ذكرنا سابقاً أن الشرط اللازم لكي تكون (5-57) عند أعظم نقطة ممكنة (maximum) لابد أن تكون:

$$\frac{\partial \overline{Q}_{x_1}}{\partial x_1} = 0$$

ولكي تكون $\frac{\partial \overline{Q}_{x_1}}{\partial x_1} = 0$ لا بد أن تكون:

$x_1 f'(x_1, x_2^*) - f(x_1, x_2^*) = 0$ وبإعادة ترتيب العلاقة ينتج:

$$f'(x_1, x_2^*) = \frac{f(x_1, x_2^*)}{x_1} \qquad (5\text{-}58)$$

والعلاقة (5-58) تدلنا على أن الإنتاجية الحدية ومتوسط الإنتاج متساويان عند أعظم نقطة يبلغها منحنى متوسط الإنتاج.

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن :

$$f'(x_1^*, x_2) = \frac{f(x_1^*, x_2)}{x_2}$$

<u>مثال:</u>

قدر باحث اقتصادي دالة الإنتاج لإحدى الشركات التي تنتج البطاريات بالشكل التالي:

$$Q = 2L + K^2$$

حيث أن:

Q تمثل مستوى الإنتاج أما L,K فهي العمل ورأس المال على التوالي. والمطلوب: إيجاد مقدار الوحدات المستخدمة من رأس المال والتي عندها تتساوى الإنتاجية الحدية مع متوسط الإنتاج، بافتراض ثبات العمل عند مستوى قدرة (٨) وحدات.

<u>الجواب:</u>

لما كانت L=8 فإن الدالة ستصبح كما يلي:

$$Q = 2(8) + K^2$$
$$= 16 + K^2$$

ومن هذه الدالة نستخرج $\overline{Q}_K$ وذلك:

$$\overline{Q}_K = \frac{16 + K^2}{K} = \frac{16}{K} + K$$

ثم نجد مشتقة $\overline{Q}_K$:

$$\frac{\partial \overline{Q}_K}{dK} = -\frac{16}{K^2} + 1$$

والشرط اللازم لكي تكون $\frac{\partial \overline{Q}_K}{dK}$ عند النقطة المتطرفة (النقطة العظمى هنا) يلزم أن تساوي

صفراً ولهذا:

$$-\frac{16}{K^2}+1=0$$

$$\frac{16}{K^2}=1$$

$$\therefore K^2=16$$

$$K=4$$

∴ عندما نستخدم (4) وحدات من رأس المال و (8) وحدات من العمل فإن متوسط الإنتاج سيكون في أعظم نقطة ممكنة. ويلزمنا الآن إثبات أن الإنتاجية الحدية تساوي متوسط الإنتاج عندما تكون (k = 4).:

وذلك بتعويض k=4 بدالة متوسط الإنتاج: $\overline{Q}_K=\frac{16}{K}+K$ ينتج:

$$\overline{Q}_K=\frac{16}{4}+4=8$$

أما إذا عوضنا عن قيمة K بدالة الإنتاجية الحدية: $\frac{\partial Q}{dK}=2K$ ينتج أن:

$$\frac{\partial Q}{dK}=2(4)=8$$

ومن ذلك نستنتج أن: $\overline{Q}_K=\frac{dQ}{dK}$ عندما تكون K=4.

وعند هذا الحجم من رأس المال يصل متوسط الإنتاج إلى أعظم نقطة ممكنة.

الجزء الثاني

مثال (٢):

إذا أعطيت دالة الإنتاج الآتية:

$$Q = 4LK - L^2 - 3K^2$$

اثبت أن $\overline{Q} = MP$ عندما يكون $\overline{Q}_K$ في أعلى مستوى إذا افترضنا ثبات L عند مستوى (6).

الجواب:

إذا كانت L=6 فإن الدالة ستؤول إلى:

$$Q = 24K - 36 - 3K^2$$

$$\therefore \overline{Q}_K = \frac{24K - 36 - 3K^2}{K}$$

$$= 24 - \frac{36}{K} - 3K$$

$$\frac{d\overline{Q}_K}{dK} = \frac{36}{K^2} - 3 \qquad \text{و}$$

والشرط اللازم كي تكون $\overline{Q}_K$ في أعلى مستوى هو أن تكون :

$$\frac{d\overline{Q}_K}{dK} = 0$$

$$\therefore \frac{36}{K^2} - 3 = 0$$

$$36 - 3K^2 = 0$$

$$\therefore K = \sqrt{12}$$

أما MP_K فتساوي:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 4L - 6K$$

لنلاحظ دالة متوسط التكاليف عندما تكون $(K = \sqrt{12})$

$$\overline{Q}_K = 24 - \frac{36}{\sqrt{12}} - 3(\sqrt{12})$$

$$= 24 - \frac{36}{3.46} - 3(3.46)$$

$$= 3.22$$

أما MP_K فتساوي :

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 4(6) - 6\sqrt{12}$$

$$= 3.22$$

ولهذا فإن $MP = \overline{Q}$ عندما $K = \sqrt{12}$

ويمكن إتباع طريقة أخرى لإثبات ذلك ملخصها :

$$\overline{Q}_K = \frac{Q}{K} = \frac{4LK - L^2 - 3K^2}{K}$$

$$= 4L - \frac{L^2}{K} - 3K$$

و

$$\frac{\partial \overline{Q}_K}{\partial K} = \frac{L^2}{K^2} - 3$$

والشرط اللازم في أن يكون $\overline{Q}_K$ في أعلى مستوى هو أن يكون $\frac{\partial \overline{Q}_K}{\partial K} = 0$

$$\therefore \frac{L^2}{K^2} - 3 = 0$$

وحيث أن L=6

$$\therefore \frac{36}{K^2} - 3 = 0$$

$$K = \sqrt{12}$$

وهي نفس النتيجة أعلاه ويمكن مواصلة الحل لإثبات أن $\overline{Q}_K = MP$ عندما يكون $\overline{Q}_K$ في أعلى مستوى عند $K = \sqrt{12}$ وL=6 (حيث افترضنا انه ثابت عند هذا المستوى) ويكون Q كما يأتي:

$$Q = 4(6)\sqrt{12} - (6)^2 - 3(\sqrt{12})^2$$

$$= 83.14 - 36 - 36$$

$$Q = 11.14$$

عندما : $\overline{Q}_K = MP_K = 3.22$

حيث أن: $\overline{Q}_K = \dfrac{Q}{K} = \dfrac{11.14}{\sqrt{12}} = 3.22$

٥-٢٠-٥ منحنى الناتج المتساوي (Isquant Production Curve)

تعريف:

يعرف منحنى الناتج المتساوي بأنه المنحنى الذي تجتمع عليه ما لا نهاية من النقاط. كل نقطة تمثل مقدارا من المزج النسبي لكلا العنصرين الإنتاجيين مثل (x1, x2) وتعطي نفس المقدار من الإنتاج.

ويمكن التعبير عن ذلك بالدالة الآتية:

$$Q^* = f(x_1, x_2) \qquad (5\text{-}59)$$

حيث أن Q^* تمثل مستوى إنتاج ثابت (معين).

تمارين (٥-٥)

جد درجة تجانس الدالة الآتية :

$$Q = 5y^2x^2 + 2yx^3$$

إذا أعطيت الدالة الآتية :

$$Q = \frac{x}{y}z + \frac{y^2}{xz} + 2\frac{z^2}{x} + 5x$$

جد درجة تجانس هذه الدالة.

باستخدام قاعدة أويلر أستخرج دالة تجانس الدالة الآتية :

$$Q = x^3 + xy^2 + y^3$$

إذا كانت لدينا الدالة الآتية :

$$Q = 3K^{0.3}L^{0.6}$$

حدد حجم الغلة الذي تمثله هذه الدالة.

قدرت دالة الإنتاج في أحدى المشاريع بما يلي :

$$Q = 20K^2 - 2K^3 - K^2L$$

أثبت بأن $MP = \overline{Q}$ عندما يكون $\overline{Q_K}$ في أعلى مستوى بافتراض ثبات L عند مستوى يساوي (4).

٥ـ٢١ درجات التكامل والإحلال بين عوامل الإنتاج

Degrees of Complementarity or Substitutibality between Production Factors:

يهتم المنتجون في معرفة فيما إذا كانت عوامل الإنتاج التي تساهم في العملية الإنتاجية عوامل احلالية أي يحل بعضها محل الآخر وذلك عن طريق الاستبدال والتعويض فيزيد المنتج من استخدام عنصر من هذه العوامل على حساب العنصر الآخر. كذلك في معرفة فيما إذا كانت عوامل الإنتاج متكاملة أي يكمل بعضها الآخر ولا يمكن الاستغناء عن بعضها والتعويض عن عامل بأخر كل ذلك يتم والمنتج يتحرك على منحنى ناتج متساوي معين.

فإذا كانت لدينا دالة إنتاج لعنصرين من عوامل الإنتاج مثل:

$$Q = f(K, L)$$

ولاختبار فيما إذا كان هذان العاملان متكاملين أو متبادلين نأخذ المشتقة الجزئية الثانية للدالة فإذا كانت هذه المشتقة عند مستوى معين من الإنتاج كما يأتي:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L} > 0$$

فإن العنصرين الإنتاجين احلاليين أي متكاملين أي يكمل أحدهما الآخر في مستوى معين من كل من (K, L) أي أن الإنتاجية الحدية للعنصر (K) موجبة كنتيجة لزيادة استخدام العنصر (L).

أما إذا كانت:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L} < 0$$

فإن العنصرين الإنتاجيين يمكن أن يحل احدهما محل الآخر أي أنهما احلاليان. أن هذه الاستنتاجات تفترض تفاضلية الدالة واستمراريتها إضافة إلى ثبات التكنولوجيا.

<u>مثال (١):</u>

خذ دالة الإنتاج التالية:

$$Q = x^3 - 2x^2 y + xy^3$$

حدد فيما إذا كان العنصرين الإنتاجيين (x, y) متكاملين أو احلالين.

<u>الجواب:</u>

$$\frac{\partial Q}{\partial x} =^2 -4xy + y^3$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = 4x + 3y^2$$

وما دام $x, y > 0$ بالمعنى الاقتصادي فإن:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial L} > 0$$

∴ العنصران الإنتاجيان (x, y) متكاملان.

مثال (٢):

في دالة الإنتاج الآتية حدد فيما إذا كان (K , L) متكاملين أو يحل احدهما محل الآخر (أي احلاليين).

$$Q = 4K^{0.35}L^{0.65}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 1.4K^{-0.65}L^{0.65}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L} = 0.91K^{-0.65}L^{-0.35}$$

وحيث يتعين أن تكون :($K, L > 0$) لكي تقوم العملية الإنتاجية لذلك :

$$\therefore \frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L} > 0$$

لكل المستويات التي تستخدم فيها كميات من (K , L)

نستنتج بأن العنصرين الإنتاجيين (K , L) عنصران متكاملان.

مثال (٣):

خذ الدالة الآتية:

$$Q = x^3 - 5xy + 3y^2$$

اختبر فيما إذا كان (x , y) متكاملين أو احلالين:

الجواب:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} 3x^2 - 5x$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = -5$$

$$\therefore \frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L} < 0$$

ومن ذلك نستنتج أن العنصرين الإنتاجيين (x , y) احلاليين أي يحل احدهما محل الآخر وبمستويات معينة من كل منهما.

٥_٢٢ المعدل الحدي للإحلال الفني (م ح أ ف)
Marginal Rate of Technical Substitution (MRTS)

وهي النسبة التي عندها يتم استبدال (إحلال) احد عناصر الإنتاج محل الآخر مع بقاء مستوى الإنتاج على ما هو عليه وبتعبير رياضي فإن (MRTS) هو سالب انحدار المماس لأية نقطة على منحنى الناتج المتساوي. فإذا كان المنتج يستعمل عنصرين إنتاجيين في العملية الإنتاجية هما (x1, x2) لإنتاج مستوى معين من الإنتاج (Q*) ويستطيع إحلال احد هذين العنصرين محل الآخر مع بقاء مستوى الإنتاج على ما هو عليه فإن النسبة التي ينبغي أن يحل بها العنصر (x2) محل العنصر (x1) تسمى بـ (MRTS) أي أن:

$$MRTS = -\frac{dx_2}{dx_1} \qquad (5\text{-}60)$$

حيث يوضح (MRTS) النسبة التي يتناقص بها x_1 عندما يتزايد x_2 على منحنى الناتج المتساوي.

والآن نوضح ذلك رياضياً:

خذ دالة الإنتاج: $Q^* = f(x_1, x_2)$

ثم خذ التفاضل الكلي:

$$dQ^* = f_1' dx_1 + f_2' dx_2$$

حيث أن f_1', f_2' هما المشتقتان الجزئيتان لـ (Q) بالنسبة لكل من (x_1, x_2) على التوالي ويظهر أنهما الإنتاجية الحدية لـ x_1 والإنتاجية الحدية لـ x_2.

ولما كان Q^* هو مستوى إنتاجي ثابت إذن:

$$dQ^* = 0$$

$$\therefore f_1'dx_1 + f_2'dx_2 = 0$$

$$f_1'dx_1 = -f_2'dx_2 \quad \text{و}$$

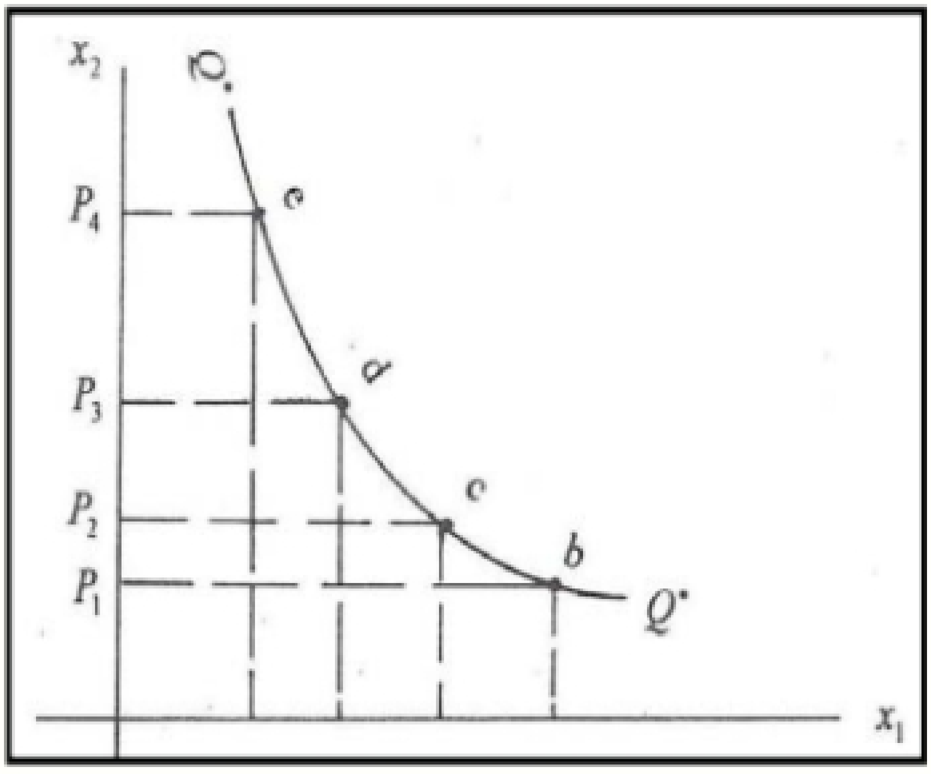
ومن ثم:

$$MRTS\left| \begin{array}{l} Q = cons. \\ x_2 : \text{أحلال} \\ x_1 : \text{محل} \end{array} \right. = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_1'}{f_2'} = \frac{MP_{x_1}}{MP_{x_2}} \quad (5\text{-}61)$$

وكذلك:

$$MRTS\left| \begin{array}{l} Q = cons. \\ x_1 : \text{أحلال} \\ x_2 : \text{محل} \end{array} \right. = -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{f_2'}{f_1'} = \frac{MP_{x_2}}{MP_{x_1}} \quad (5.62)$$

وكما يظهر في الشكل رقم (17-5)



شكل رقم (٥-١٧)

وإذا مثلنا (MRTS) بالقيمة المطلقة لانحدار منحنى السواء عند النقطة (x_1, x_2) وعلى سبيل المثال تظهر في الشكل أعلاه أربعة نقاط هي (b, c, d , e) حيث يلاحظ أن قيمة $\frac{dx_2}{dx_1}$ تبدأ بالتناقص كلما استمر إحلال (x_2) محل (x_1) وذلك لان الاستمرار في عملية الإحلال يؤدي إلى تناقص (Δx_1) اللازمة للعملية الإنتاجية وذلك لازدياد أهميته في العملية الإنتاجية وتزايد (Δx_2) لتناقص أهميته في العملية الإنتاجية وهذا يحدث كلما اتجهنا من b إلى e على خط الناتج المتساوي.

وهذا التناقص يسمى بقانون تناقص المعدل الحدي للإحلال

(Law of Diminishing Marginal Rate of Substitution)

<u>مثال (١):</u>

يتحرك الإنتاج على منحنى سواء متمثل بالدالة الإنتاجية التالية:

$$\begin{aligned} Q &= f(K, L) \\ &= 0.6K + 0.2L \end{aligned}$$

حيث أن Q يمثل مستوى إنتاج معين و (K, L) كميات رأس المال والعمل المستخدمة في العملية الإنتاجية.

والمطلوب إيجاد:

المعدل الحدي للإحلال الفني (MRTS) لرأس المال محل العمل ثم (MRTS) للعمل محل رأس المال.

مقدار الإنتاج إذا كان K=20 و L=10 ج)من النتيجة التي ستحصل عليها في الفقرة (٢) استخرج كم نستخدم من K إذا زدنا L من (10) إلى (30) وحدة مع الاحتفاظ بـ Q في نفس المستوى؟

<u>الجواب:</u>

$$MRTS\left| \begin{array}{l} Q = cons. \\ K : \text{احلال} \\ L : \text{محل} \end{array} \right. = \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3} \quad (\text{أ})$$

$$MRTS\left| \begin{array}{l} Q = cons. \\ L : \text{أحلال} \\ K : \text{محل} \end{array} \right. = \frac{\frac{\partial Q}{\partial K}}{\frac{\partial Q}{\partial L}} = \frac{0.6}{0.2} = 3$$

(ب)

$$Q = 0.6(20) + 0.2(10)$$

$$= 12 + 2 = 14$$

(ج)

$$Q = 0.6K + 0.2L$$

$$14 = 0.6K + 0.2(30)$$

$$14 = 0.6K + 6$$

$$\therefore K = \frac{8}{0.6} = 13.3$$

كما يمكن استخدام العلاقة (5-61) لإيجاد مقدار K وذلك:

$$MRTS\left| \begin{array}{l} Q = cons = 14. \\ K \\ L \end{array} \right. = -\frac{\Delta K}{\Delta L}$$

$$\frac{1}{3} = -\frac{\Delta K}{30 - 10}$$

$$\Delta K = -\frac{20}{3}$$

∴ نستخدم من K الكمية الآتية:

$$K + \Delta K = 20 - \frac{20}{3} = \frac{40}{3} = 13.3$$

وهي نفس النتيجة:

أو

$$MRTS\left|\begin{array}{l}Q = cons = 14.\\ L\\ K\end{array}\right. = -\frac{\Delta L}{\Delta K}$$

$$3 = -\frac{20}{\Delta K}$$

$$\therefore \Delta K = -\frac{20}{3}$$

∴ نستخدم من K الكمية $(20 - \frac{20}{3} = 13.3)$ وهي نفس النتيجة.

<u>مثال (٣):</u>

جد المعدل الحدي للإحلال الفني لرأس المال محل العمل في الدالة التالية:

$$Q = L^{3/5} K^{1/5}$$

ثم افترض أن Q=150 وجد (MRTS)

$$MRTS\left|\begin{array}{l}Q = cons.\\ K : \text{أحلال}\\ L : \text{محل}\end{array}\right. = \frac{f'L}{f'K} = \frac{\frac{3}{5}L^{-2/5}K^{1/5}}{\frac{1}{5}L^{3/5}K^{-4/5}}$$

$$= 3\frac{K}{L}$$

إذا افترضنا أن Q=150 فإن الدالة تؤول إلى:

$$Q = 150 = L^{3/5} K^{1/5}$$

$$(150)^5 = L^3 K$$

$$\therefore K = (150)^5 L^{-3}$$

ولهذا فإن:

$$MRTS\left|\begin{array}{l} Q = cons. \\ K \text{ احلال} \\ L \text{ محل} \end{array}\right. = \frac{3K}{L} = \frac{3(150)^5 L^{-3}}{L}$$

$$= 3(150)^5 L^{-4}$$

ويمكن الوصول لنفس النتيجة عند استخراج $MRTS = -\frac{dK}{dL}$ من الدالة

وذلك: $K = (150)^5 L^{-3}$

$$\frac{dK}{dL} = -3(150)^5 L^{-4}$$

$$\therefore MRTS = -\left[-3(150)^5 L^{-4}\right]$$

$$= 3(150)^5 L^{-4}$$

٥ـ٢٣ مرونة الإحلال بين عوامل الإنتاج (σ)
Elasticity of Substitution Between Production Factors

تعريف:

هي مقياس لردود الفعل النسبية لأحد عوامل الإنتاج نتيجة للتغير النسبي في العامل الآخر. أي هي النسبة المئوية للتغير في المعدل الحدي للإحلال الفني (MRTS). فعندما نتحرك من نقطة إلى أخرى على منحنى الإنتاج المتساوي فإن (MRTS) تتغير كلما استخدمنا حصصا" من كل من العاملين الإنتاجيين.

فمرونة الإحلال بين عوامل الإنتاج (σ) تقيس لنا العلاقة بين هذه التغيرات كلما تحركنا على طول خط الناتج المتساوي، وهي تضع تحت تصرف المنتج صيغة يمكن من خلالها معرفة فيما إذا كانت عملية الاستبدال يسيرة وممكنة عند كل نقطة على منحنى الناتج المتساوي.

ولهذا فإن قيمة (σ) تختلف باختلاف طريقة مزج عوامل الإنتاج وهي موجبة القيمة تتراوح بين (0) و(∞). وتشير ($\sigma = 0$) إلى عدم وجود تغير في نسبة استخدام

عاملي الإنتاج. أي أنهما يستخدمان بحصص ثابتة وهذا يعني عدم وجود عملية إحلال بينهما بينما ($\sigma = \infty$) تشير إلى عدم وجود تغير في معدل الإحلال عندما تتغير النسب المستخدمة من عوامل الإنتاج أي يمكن إحلال احدهما محل الآخر بشكل تام بإبقاء قيمة (σ) نفسها سواء تم إحلال (x_1) محل (x_2) أو بالعكس أما (σ) فتظهر رياضيا" كالآتي:

$$\sigma = \frac{\Delta\left(\frac{K}{L}\right)}{\left(\frac{K}{L}\right)} \div \frac{\Delta MRTS}{MRTS}$$

$$= \frac{\Delta\left(\frac{K}{L}\right)}{\Delta MRTS} \frac{MRTS}{\left(\frac{K}{L}\right)} \qquad (5\text{-}62)$$

وللاختصار إذا كانت: MRTS=S

و $\frac{K}{L} = k$

فإن: $\sigma = \frac{dk}{dS}\frac{S}{k} \qquad (5\text{-}63)$

<u>مثال (١):</u>

جد مرونة الإحلال بين عوامل الإنتاج في الدالة التالية:

$$Q = AK^b L^c$$

$$MRTS = \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} = \frac{AcK^b L^{c-1}}{AbK^{b-1} L^c}$$

$$= \frac{cK}{bL}$$

وللاختصار نجعل: $MRTS = S , \frac{K}{L} = k$

$$\therefore MRTS = S = \frac{c}{b}(k)$$

و $$\frac{dS}{dk} = \frac{c}{b}$$

ولما كانت مرونة الإحلال (σ) هي:

$$\sigma = \frac{dk}{dS}\frac{S}{k}$$

$$= \frac{b}{c}\frac{\frac{c}{b}(k)}{k}$$

$$= \frac{b}{c}\frac{c}{b}k\frac{1}{k}$$

$$\therefore \sigma = 1$$

ومن ذلك نستنتج أن مرونة الإحلال هي (1) لكل مستويات الخلط بين عاملي الإنتاج.

<u>مثال (٢) :</u>

جد مرونة الإحلال بين عوامل الإنتاج في الدالة الآتية :

$$Q = 10K^{0.2}L^{0.6}$$

<u>الجواب :</u>

مرونة الإحلال هي :

$$\sigma = \frac{b}{c}\frac{c}{b}k\frac{1}{k}$$

$$= \frac{0.2}{0.6}\frac{0.6}{0.2}\frac{k}{k} = 1$$

ويلاحظ هنا في أن (σ) في دالة كوب. ودوكلاص هي واحد ما دامت الحصص الثابتة للإنتاج لا تسمح للإحلال بين عوامل الإنتاج.

مثال (٣) :

خذ دالة إنتاج من نمط آخر هي:

$$Q = b\left[\alpha k^{-C} + (1-\alpha)L^{-C}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

جد مرونة الإحلال بين عوامل الإنتاج.

الجواب :

$$\sigma = \frac{dk}{ds}\frac{s}{k}$$

والآن نستخرج أولا" (S) وتساوي :

$$S = \frac{MP_l}{MP_K} = \frac{b^{-c}(1-\alpha)\left(\frac{Q}{L}\right)^{1+C}}{\alpha b^{-c}\left(\frac{Q}{K}\right)^{1+C}}$$

$$= \frac{(1-\alpha)\left(\frac{Q}{L}\right)^{1+C}}{\alpha\left(\frac{Q}{K}\right)^{1+C}}$$

$$= \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{K^{1+C}}{L^{1+C}}$$

$$= \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+C}$$

$$\therefore S = \frac{1-\alpha}{\alpha}(k)^{1+C}$$

$$\therefore \frac{ds}{dk} = (1+c)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)(k)^{c}$$

والآن : $\sigma = \frac{dk}{ds}\frac{s}{k}$

$$= \frac{1}{(1+c)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)k^{c}}\left(\frac{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)(k)^{1+c}}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{(1+c)\left(\frac{k^{1+c}}{k^{1+c}}\right)}$$

$$\therefore \sigma = \frac{1}{1+c}$$

مثال (٤) :

خذ الدالة أعلاه بالصيغة الآتية :

$$Q = 2\left[4k^{-0.4} + (1-4)L^{-0.4}\right]^{-\frac{1}{0.4}}$$

جد مرونة الإحلال بين عاملي الإنتاج (K , L)

الجواب :

$$\sigma = \frac{1}{1+c}$$

ولما كانت : $c = 0.4$ في الدالة أعلاه

$$\therefore \sigma = \frac{1}{1+0.4} = \frac{5}{7}$$

تمارين (٦-٥)

وجد احد الباحثين أن دالة الإنتاج لمصنع الزجاج كانت كالآتي :

$$Q = 5L + 2K^2$$

جد مقدار (K) الذي عنده تتساوى الإنتاجية الحدية مع متوسط الإنتاج بافتراض أن عنصر العمل ثابت عند (10) وحدات.

إذا كانت لدينا دالة إنتاج من النوع الآتي :

$$Q = 2K^{0.25}L^{0.75}$$

حدد فيما إذا كان (K, L) عنصري إنتاج متكاملين أو احلاليين.

يتحرك منتج في إحدى المشاريع على منحنى سواء يتمثل بدالة الإنتاج الآتية :

$$Q = 0.4K + 0.5L$$

أ) جد: المعدل الحدي للإحلال الفني (MRTS) للعمل محل رأس المال وبالعكس.

ب) أذا كانت (K=5)، (L=12) فكم يكون حجم الإنتاج ؟

ج) بالاستناد على ما تحصل عليه الفقرة (ب) أستخرج كم يستخدم المنتج من (K) أذا خفض (L) إلى (8) وحدات مع أبقاء (Q) على نفس المستوى.

جد مرونة الإحلال بين عوامل الإنتاج في الدالة الآتية :

$$Q = 2x_1^{\,2}x_2$$

إذا أعطيت الدالة الآتية :

$$Q = 5\left[3K^{-0.6} + (1-4)L^{-0.6}\right]^{-\frac{1}{0.6}}$$

حدد درجة مرونة الإحلال بين عاملي الإنتاج (K,L) وعلق على النتيجة.

٢٤ـ٥ بعض دوال الإنتاج الشائعة

١-٢٤-٥دالة كوب - دوكلاس (Cobb – Douglas Production Function).

وهي نوع من دوال الإنتاج التي تأخذ الصيغة الآتية:

$$Q = ax_1^{b1}x_2^{b2}\dots x_n^{bn} \qquad (5\text{-}64)$$

حيث أن:

Q = كمية الإنتاج

و $x_1, x_2, ..., x_n$: عوامل الإنتاج

و $b_1, b_2, ..., b_n$ معالم.

وتنسب هذه الدالة إلى كل من الاقتصاديين كوب ودوكلاص حيث ظهرت في مقالة لهما في مجلة الاقتصاد الأمريكية سنة ١٩٢٨ والتي حاولا فيها توضيح ثبات المساهمة النسبية لرأس المال والعمل في الدخل القومي. وتتميز هذه الدالة في أن معالمها $b_1+b_2+...+b_n=1$ كما تتميز ببساطتها إضافة لكونها واسعة الاستخدام في التطبيقات الاقتصادية سواء في نظرية توزيع الدخل أو نظرية الإنتاج وكذلك في نظرية النمو الاقتصادي.

وتظهر هذه الدالة عادة بمتغيرين رئيسين هما رأس المال (K) والعمل (L) وبالشكل الآتي:

$$Q = AK^b L^c \qquad (5\text{-}65)$$

حيث أن A , b , c هي معالم موجبة.

وإن (b + c =1)

ومن الخصائص العامة لهذه الدالة و (دوال إنتاجية أخرى) كونها:

الإنتاجية الحدية لكلا العاملين الإنتاجيين موجبة أي أن:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} > 0 \text{ و } \frac{\partial Q}{\partial K} > 0$$

تناقص الإنتاجية الحدية لأي عامل إنتاجي إذا زيد استخدام ذلك العامل مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة أي أن:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0 \text{ و } \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0$$

إذا زيد استخدام احد العاملين الإنتاجيين فإن الإنتاجية الحدية للعامل الآخر تتزايد.

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L \partial K} > 0 \text{ و } \frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L} > 0$$

إذا لم يكن هناك عمل أو رأس مال أو كليهما فإن الإنتاج يكون صفراً:

$$Q = f(K,0) = 0$$

$Q = f(0,L) = 0$ (في هذه الحالة يكون الإنتاج بدائياً ليس ذا قيمة تافهة)

$$Q = f(0,0) = 0$$

حجم الغلة في هذه الدالة حجم ثابت لان (b+c=1) وينتج عن ذلك أن الدالة خطية متجانسة.

إذا دفعت للعاملين الإنتاجين تعويضات بمقدار إنتاجيتهما الحدية فإن مجموع ما يدفع لهما يساوي قيمة الإنتاج وأن حصة كل من العاملين الإنتاجيين في الإنتاج تساوي سعر كل منهما (الإنتاجية الحدية) مضروب في الكمية المستخدمة من كل منهما أي أن:

$$K\frac{\partial Q}{\partial K} + L\frac{\partial Q}{\partial L} = Q$$

<u>مثال:</u>

إذا كانت دالة الإنتاج لكوب - دوكلاس بالصيغة الآتية:

$$Q = 10K^{1/4}L^{3/4}$$

استخدم هذه الدالة لإثبات الخصائص العامة لهذه الدالة مع حساب مستوى الإنتاج إذا كانت k

=256 و L = 81

الإنتاج الحدي لكل من العمل ورأس المال موجب ما دام.

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{10}{4}K^{-3/4}L^{3/4} > 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{30}{4}K^{1/4}L^{-1/4} > 0 \text{ و}$$

إن الإنتاج الحدي لأحد العوامل يتناقص إذا زيد استخدامه مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة:

$$\frac{\partial(\partial Q)}{\partial K(\partial K)} = \frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = -\frac{30}{16}K^{-\frac{7}{4}}L^{-\frac{3}{4}} < 0$$

$$\frac{\partial(\partial Q)}{\partial L(\partial L)} = \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = -\frac{30}{16}K^{\frac{1}{4}}L^{-\frac{5}{4}} < 0$$

إذا زيد من استخدام احد عاملي الإنتاج فإن الإنتاج الحدي للعامل الآخر يتزايد.

$$\frac{\partial}{\partial K}\frac{(\partial Q)}{(\partial L)} = \frac{30}{16}K^{-3/4}L^{-1/4} > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial L}\frac{(\partial Q)}{(\partial K)} = \frac{30}{16}K <^{-3/4} L^{-1/4} > 0$$

(ويلاحظ أن كلا من المقدارين أعلاه متساويين)

إذا كان k = 0 فإن: $Q = 10(0)^{1/4}L^{3/4} = 0$ وهذا يعني إذا كان رأس المال غير موجود فإن

إنتاج العمل يكون تافها (Q = 0)

وإذا كان L = 0 فإن: $Q = 10K^{1/4}(0)^{3/4} = 0$ وهذا يعني إذا كان رأس المال موجود فقط

والعمل غير موجود فإن الإنتاج لا يتحقق أي أن: Q = 0

وإذا كان كل من (K , L = 0) فإن: $Q = 10K^{1/4}(0)^{3/4} = 0$

أي لا يوجد إنتاج إذا لم يوجد عمل ولا مكائن.

الدالة خطية متجانسة وحجم الغلة فيها ثابت لان :

$$10(\lambda K)^{1/4}(\lambda L)^{3/4} = 10\lambda^{1/4}\lambda^{3/4}K^{1/4}L^{3/4}$$

$$= \lambda[10K^{1/4}L^{3/4}]$$

$$= \lambda Q$$

وحيث أن قوة $\lambda = 1$ أي أن (n = 1) فالدالة خطية متجانسة (راجع الفقرة ٥-١٧-٢) ولتوضيح ذلك ضاعف عوامل الإنتاج تحصل على :

$$10(2K)^{1/4}(2L)^{3/4} = 2^{1/4}2^{3/4}[10K^{1/4}L^{3/4}]$$
$$= 2[10K^{1/4}L^{3/4}]$$
$$= 2Q$$

ويلاحظ أن الإنتاج Q قد تضاعف أيضاً أي زاد بنفس نسبة زيادة عوامل الإنتاج مما يجعلنا نستنتج بان حجم الغلة ثابت وان الدالة خطية متجانسة.

إذا طبقنا قاعدة (اويلر) على الدالة $Q = A K^b L^c$ نلاحظ ما يأتي :

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = AbK^{b-1}L^c = \frac{b}{K}AK^bL^c = b\frac{Q}{K} \quad \dots (5\text{-}66)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = AcK^bL^{c-1} = \frac{c}{L}AK^bL^c = c\frac{Q}{L} \quad \dots (5\text{-}67)$$

ويلاحظ لان الإنتاجية الحدية لرأس المال هي (b) مضروب في متوسط إنتاجه رأس المال أما الإنتاجية الحدية للعمل فهي (c) مضروب في متوسط إنتاجية العمل.

وبضرب $\frac{\partial Q}{\partial L}$ و $\frac{\partial Q}{\partial K}$ بكل من (K , L) على التوالي نحصل من العلاقتين (5-66) و(5-67) على ما يأتي :

$$K\frac{\partial Q}{\partial K} + L\frac{\partial Q}{\partial L} = Kb\frac{Q}{K} + Lc\frac{Q}{L}$$
$$= bQ + cQ$$
$$= (b+c)Q$$

وحيث أن (b + c =1)

$$\therefore\ K\frac{\partial Q}{\partial K} + L\frac{\partial Q}{\partial L} = Q$$

نستنتج من ذلك بأنه إذا دفعت لعوامل الإنتاج تعويضات تساوي الإنتاجية الحدية لكل منهما فإن مجموع ما يدفع لهما يساوي قيمة الإنتاج.

مستوى الإنتاج عندما : K =256 و L = 81 هو :

$$Q = 10(256)^{1/4}(81)^{3/4}$$

$$= 10(4)(3)^3$$

$$= 1080$$

٢-٢٤-٥دالة مرونة الإحلال الثابتة (م أ ث)

Constant Elasticity of Substitution Function (C E S)

وهي من الدوال المتجانسة وعندما تكون خطية تكتب كالآتي :

$$(5\text{-}68)\ \ldots Q = b[\alpha K^{-c} + (1-\alpha)L^{-c}]^{-1/c}$$

حيث أن k , L تمثلان رأس المال والعمل على التوالي :

و $c\ ,\ \alpha\ ,\ b$ ثوابت، ($c > -1$ و $b,\alpha > 0$)

أما متوسط التكاليف ($\bar{Q}$) فيظهر كالآتي :

$$(5\text{-}69)\ \ldots \bar{Q}_k = \frac{Q}{K} = \frac{b}{K}[\alpha K^{-c} + (1-\alpha)L^{-c}]^{-1/c}$$

$$(5\text{-}70)\ \ldots \bar{Q}_L = \frac{Q}{L} = \frac{b}{L}[\alpha K^{-c} + (1-\alpha)L^{-c}]^{-1/c}$$

والإنتاجية الحدية MP_k كما يأتي :

$$MP_k = \frac{\partial Q}{\partial K} = b\alpha K^{-(1+c)}[\alpha K^{-c} + (1-\alpha)L^{-c}]^{-1/c-1}$$

$$= \alpha K^{-(1+c)}Q[\alpha K^{-c} + (1-\alpha)L^{-c}]^{-1}$$

والآن لاحظ أن المقدار : $\left[\alpha K^{-C} + (1-\alpha)L^{-C}\right]^{-1}$ ستأتي من العمليات الآتية :

خذ دالة الإنتاج :

$$Q = b\left[\alpha K^{-c} + (1-\alpha)L^{-c}\right]^{-\frac{1}{c}}$$

يقسم الطرفين على (b) ينتج :

$$\frac{Q}{b} = \left[\alpha K^{-C} + (1-\alpha)L^{-C}\right]^{-\frac{1}{C}}$$

والآن نرفع الطرفين إلى القوة (c) فينتج :

$$\left(\frac{Q}{b}\right)^{C} = \left[\alpha K^{-C}(1-\alpha)L^{-C}\right]^{-1}$$

$$\therefore MP_L = \frac{\alpha}{K^{(1+C)}}Q\left(\frac{Q}{b}\right)^{C}$$

$$= \frac{\alpha}{b^{c}}\left(\frac{Q^{1+C}}{K^{1+C}}\right)$$

$$(5\text{-}71)\quad \ldots\therefore MP_L = \alpha b^{-c}\left(\frac{Q}{K}\right)^{(1+c)}$$

وبالمثل يمكن استخراج :

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\alpha L} = (1-\alpha)bL^{-(1+C)}\left[\alpha K^{-C}(1-\alpha)L^{-C}\right]^{-\frac{1}{C}-1}$$

$$= (1-\alpha)L^{-(1+C)}Q\left[\alpha K^{-C}(1-\alpha)L^{-C}\right]^{-1}$$

$$\therefore MP_L = b^{-C}(1-\alpha)\left(\frac{Q}{L}\right)^{(1+C)}$$

ويلاحظ أن كل من دالـة (كـوب - دوكـلاص) ودالـة (CES) لـيس لإنتـاجيتهما الحديـة (M P)

ومتوسط إنتاجهما (A P) نقطة عظمى فكلا (MP) و(AP) دالتان متناقصتان باضطراد.

أما المعدل الحدي للإحلال الفني لرأس المال محل العمل فانه يكون كما يلي :

خذ الدالة (CES) مرة أخرى :

$$Q = b[\alpha K^{-c} + (1-\alpha)L^{-c}]^{-1/c}$$

ولندع $dQ = 0$ تحصل على :

$$dQ = b\alpha K^{-c-1}[\alpha K^{-c} + (1-\alpha)L^{-c}]^{-1/c-1} dK +$$

$$(1-\alpha)bL^{-c-1}[\alpha K^{-c} + (1-\alpha)L^{-c}]^{-1/c-1} dL = 0$$

$$\therefore -\frac{dK}{dL} = \underset{K\ for\ l}{MRTS} = \frac{b(1-\alpha)L^{-c-1}}{b\alpha K^{-c-1}}$$

$$= \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{K}{L}\right)^{1+c} \quad (5\text{-}72)$$

أما

$$\therefore -\frac{dL}{dK} = \underset{L\ for\ K}{MRTS} == (\frac{\alpha}{(1-\alpha)})(\frac{L}{K})^{1+c}$$

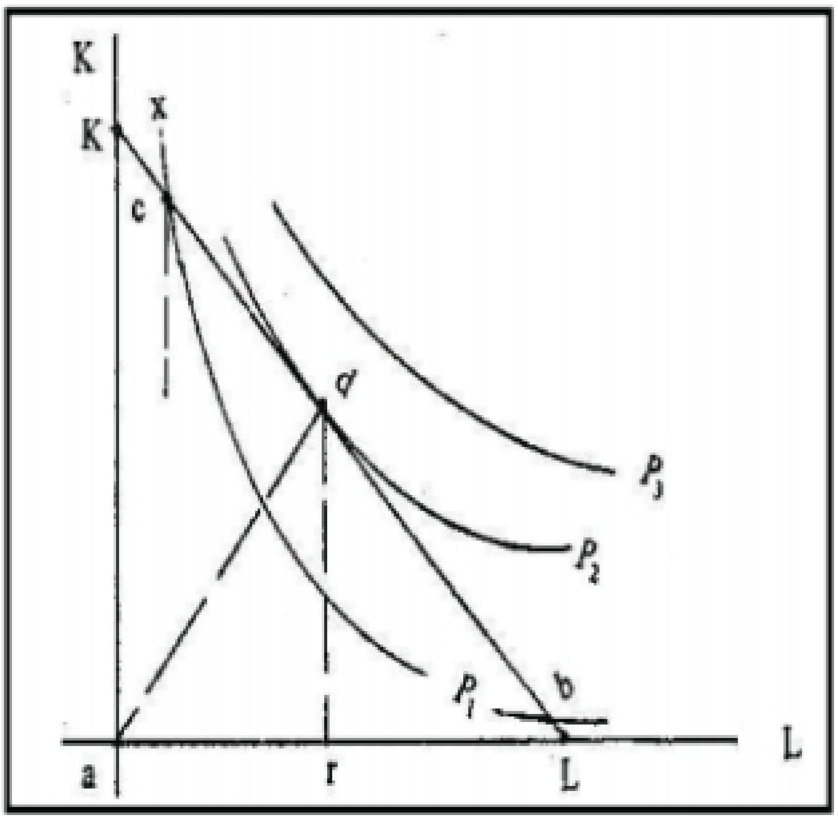
٥_٢٥ الكفاءة الاقتصادية

يقصد بالكفاءة الاقتصادية (economic efficiency) تعظيم الإنتاج بوجود دالة تكاليف مقيدة. وهذا ما يعتبره المنتج هدفا " رئيسا " له فكيف يتم له ذلك ؟ لنواصل الحديث : إذا كانت لدينا دالة إنتاج كالآتي $Q = f(K,L)$ حيث أن (K , L) هما رأس المال والعمل على التوالي، وكان سعر رأس المال (r) وهو إيجار رأس المال وسعر العمل (w) وهو الأجور فإن المنتج ينفق على الإنتاج (M = Rk + Wl) بحيث يستطيع تحقيق أعلى إنتاج ممكن من إنفاق تكاليف قدرها (M)

وإذا مثلنا مستوى التكاليف (M) المحدد من قبل المنتج بمنحنى التكاليف المتساوية (Isocost) وسمينا هذا المنحنى ب (KL) فإن انحدار (K L) هو :

$$\frac{\text{سعر الوحدة الواحدة من L}}{\text{سعر الوحدة الواحدة من K}}$$

كما مبين في الشكل رقم (18 - 5)



شكل رقم (٥-١٨)

وإذا نظرنا إلى الشكل رقم (5-18) أعلاه نلاحظ ما يأتي :-

تشير p_1 ، p_2 ، p_3 إلى منحنيات الناتج المتساوي ويتضح من خلالها أن منحنى الإنتاج (P_1) أن درجات مزج العناصر الإنتاج p_3 لا يمكن أن يبلغه المنتج وذلك لان المتوفر من درجات مزج عناصر الإنتاج محدد بالمنطقة التي تقع على أو دون منحنى التكاليف المتساوية (KL) ولهذا تكون جميع النقاط (KL) مرشحة لاختيار المنتج ومنها النقطتين (b , c) اللتان تقعان على منحنى الناتج المتساوي (P_1) ولكن يبدو واضحاً إنهما ليستا الأفضل مما يمكن أن يحصل عليه المنتج لو ذهب إلى النقطة d حيث الإنتاج الأعلى دون أي زيادة في التكاليف ولهذا سيختار المنتج (d) وهي النقطة التي يتماس فيها منحنى التكاليف المتساوية (KL) مع منحنى الناتج المتساوي (p_2) ولهذا فإن مزج عوامل الإنتاج الممثل بانحدار (ad) هو المزج ألا مثل لأنه يعطي أعلى إنتاج بتكاليف معينة معطاة.

ولنفرض أن المنتج اختار النقطة (c) لكنه سيجد أن المعدل الحدي للإحلال الفني (MRTS) لرأس المال بدلاً من العمل الذي يظهره انحدار المماس (xx) نسبياً مرتفع كأن يكون (4:1) والذي يعني إمكانية إحلال وحدة واحدة من العمل محل (4) وحدات من رأس المال عند تلك النقطة في حين أن الأسعار النسبية لعوامل الإنتاج التي يظهرها (KL) هي اقل بكثير من ذلك ولنقل إنها (1:1) وفي هذه الحالة فإن تكاليف وحدة واحدة من العمل يمكن أن تحل محل (4) وحدات من رأس المال في العملية الإنتاجية ولهذا فإن المنتج سيفضل إحلال العمل محل رأس المال وبذلك سيتجه طبقاً لهذه المقارنات نحو النقطة **d** إلى أن يستقر فيها ولو افترضنا أنه اختار النقطة (b) حيث (MRTS) اقل من الأسعار النسبية لعوامل الإنتاج مما يدفع المنتج لإحلال رأس المال محل العمل متجهاً إلى النقطة (d) ليستقر فيها ومن ذلك نستنتج أن المنتج يصل إلى التوازن وهو (أعلى إنتاج بتكاليف معطاة) عندما يكون (MRTS) لرأس المال بالعمل يساوي:

$$\frac{\text{سعر العمل (الأجور)}}{\text{سعر رأس المال (الإيجار)}}$$

إن ذلك يظهر رياضياً كالآتي :-

إذا كانت دالة الإنتاج من النوع :

$$Q = f(K, L)$$

بينما دالة التكاليف (النفقات) قيمتها معطاة :

$$M = rK + wL$$

فإن تعظيم (Q) طبقاً للقيد(M) يمكن حله باستخدام مضاعف لاكرانج وكالآتي:

$$M(K, L, \lambda) = f(K, L) - \lambda(rK + wL - M)$$

نأخذ المشتقة الجزئية الأولى:

$$\frac{\partial M}{\partial K} = \frac{\partial f}{\partial K} - \lambda r = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial L} = \frac{\partial f}{\partial l} - \lambda w = 0$$

وبإعادة الترتيب النتائج نحصل على :-

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial K}}{r} \text{ و } \frac{\partial f}{\partial K} = \lambda r$$

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial L}}{w} \text{ و } \frac{\partial f}{\partial L} = \lambda w$$

$$\therefore \frac{\frac{\partial f}{\partial K}}{r} = \frac{\frac{\partial f}{\partial L}}{w}$$

وبإعادة الترتيب ينتج :-

$$\frac{w}{r} = \frac{\frac{\partial f}{\partial L}}{\frac{\partial f}{\partial K}}$$ ويساوي MRTS (لإحلال رأس المال محل العمل)

أو: $$MRTS = \frac{MP_L}{MP_k} = \frac{w}{r} \qquad (5-73)$$

٢٦ـ٥ تعظيم الأرباح عند المنتج المتنافس Maximizing Profit For a Com Petitive Producer

إذا كانت دالة الإنتاج معروفة وسعر الوحدات المنتجة معطاة و أسعار عوامل الإنتاج معطاة أيضاً.

فكم يستخدم المنتج من عوامل الإنتاج كي يصبح الربح لديه أعظم ما يكون ؟

ولتوضيح ذلك نفترض أن (Q) هي كمية الإنتاج السنوية و © سعر الوحدة الواحدة من وحدات الإنتاج (معطاة) و (K) هي كمية رأس المال المستخدم من مكائن ومعدات المستخدمة خلال السنة (r) سعر أيجار المكائن والمعدات (معطاة) و(L) كمية العمل المستخدمة سنوياً و (w) معدل الأجور المدفوعة (معطاة).

أي أن : (Q,K,L) متغيرات أما (c,r,w) فهي معالم (مؤشرات يهتدي بها المنتج لحساب أرباحه) وإذا كانت دالة الإنتاج بصيغتها العامة :

$$Q = f(K,L)$$

وإن المسالة التي أمامنا هي كيفية تعظيم أرباحه مع الوفاء بالشروط الواردة في دالة الإنتاج.

ولما كانت الأرباح = الإيراد الكلي - التكاليف الكلية

$$\pi = cQ - (rK + wL) \qquad (5\text{-}74)$$

ويظهر واضحاً أن الأرباح (π) هي دالة لكل من (Q,K,L) ولكن دالة الإنتاج (Q) هي دالة لكل من (K,L) لهذا يمكن إعادة كتابة دالة الأرباح π() كدالة لكل من (K,L) :

$$\pi = cf(K,L) - (rK + wL)$$

ولأجل أيجاد الشرط الأول لبلوغ الدالة π( ) أعلى الأرباح نلجأ للمشتقة الجزئية الأولى بالنسبة لكل من (K,L) على التوالي ونجعل كل منهما =0 كالآتي :

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = c\frac{\partial Q}{\partial K} - r = 0$$

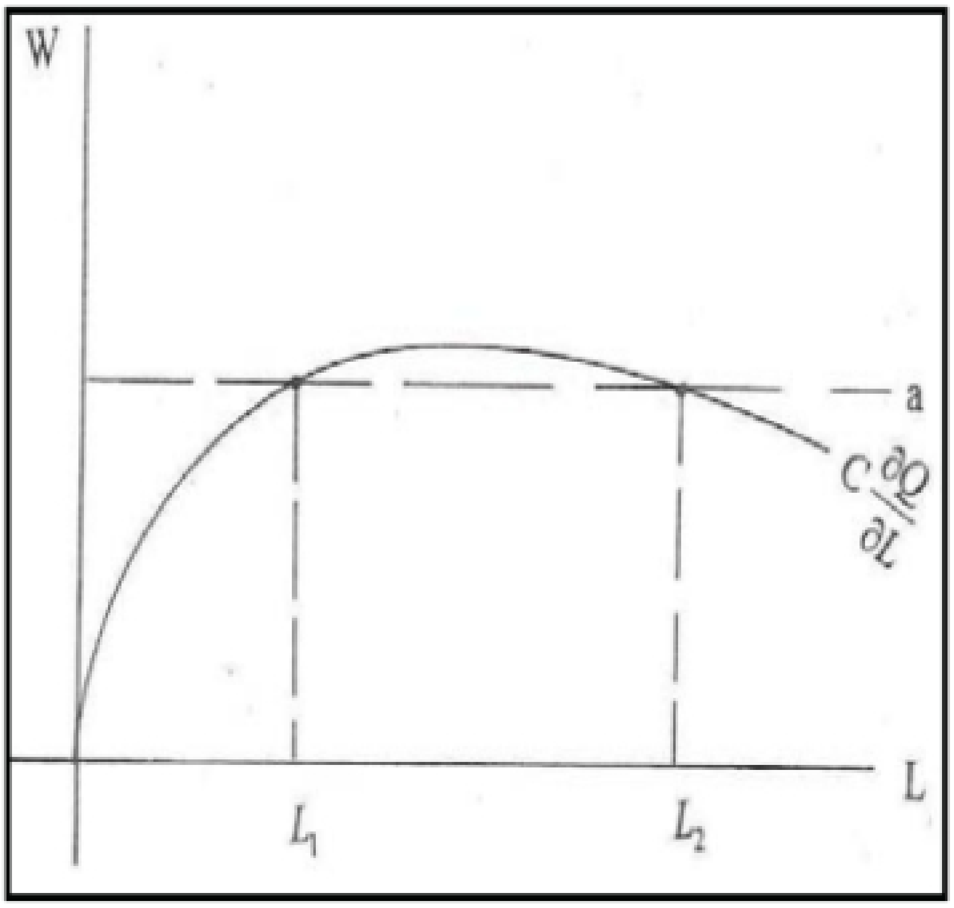
$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = c\frac{\partial Q}{\partial L} - w = 0$$

$$\therefore r = c\frac{\partial Q}{\partial K}, w = c\frac{\partial Q}{\partial L}$$

يلاحظ أن $\frac{\partial Q}{\partial K}$ ما هو إلا الإنتاجية الحدية لرأس المال موضحة بالكميات المنتجة وان $c\frac{\partial Q}{\partial K}$ هو قيمة الإنتاجية الحدية لرأس المال.وهكذا نلاحظ أن الشرط الأول بالنسبة للمنتج كي يحقق أقصى الأرباح هو وجوب كون :

قيمة الإنتاجية الحدية لرأس المال = سعر الإيجار (الإعارة) وبنفس الطريقة فإن الشرط اللازم لتحقيق أقصى الأرباح هو وجوب كون : قيمة الإنتاجية الحدية للعمل = معدل الأجور

والآن لنناقش الشرط الثاني : يمكن تصور دالة إنتاج تتزايد فيها الإنتاجية الحدية للعمل MP_L في بادئ الأمر كأن تكون فرص التخصص ممكنة ثم تبدأ MP_L بالتناقص بسبب ظهور الاختناقات مثلاً دعنا نتأمل ذلك في الشكل رقم (5-19)



شكل رقم (١٩-٥)

حيث يظهر في الشكل قيمة الإنتاجية الحدية للعمل مقابل كمية العمل. ويحصل المنتج على أعلى ربح عندما $L_2 = L$ وإذا كان $L_1 = L$ فإن زيادة كمية العمل ستؤدي إلى زيادة قيمة الإنتاج الكلي أكثر من زيادة قائمة الأجور الكلية.

ونفس المناقشة يمكن أن تقال بشأن رأس المال. واستناداً إلى ذلك فإن الشرط الثاني لبلوغ الدالة أقصى الأرباح هو إيجاد المشتقة الجزئية الثانية لدالة الإنتاج التي يجب أن تكون حصيلتها اقل من صفر أي أن الإنتاجية الحدية تتناقص كما يأتي :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0$$

<u>مثال:</u>

إذا كانت دالة الإنتاج من النوع الآتي:

$$Q = \frac{3}{2} K^{1/5} L^{3/5}$$

حيث أن Q هو الإنتاج في الشهر الواحد و K هو رأس المال ممثلاً بماكنة في الساعة للمعدات في الشهر الواحد وL هو العمل ممثلاً بـ رجل - ساعة في الشهر أيضاً.

كما قدمت المعلومات الآتية:

c سعر الوحدة الواحدة من الإنتاج = 10

w معل الأجور = 1 في الساعة

r سعر إيجار المكائن = 2 في الساعة

جد مستوى الإنتاج الذي عنده يحقق المنتج أقصى الأرباح.

<u>الجواب:</u>

دالة الربح هي:

نفرض أن الربح = π إذن:

$\pi = cQ - (rK + wL)$ من العلاقة (5-74)

$$= 10(\frac{3}{2} K^{1/5} L^{3/5}) - (2K + L)$$

$$\therefore \pi = 15K^{1/5} L^{3/5} - 2K - L$$

والآن :

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = 3K^{-4/5}L^{3/5} - 2$$

وبما أن الشرط اللازم كي تكون π عند أعظم نقطة هو أن تكون $\frac{\partial \pi}{\partial K} = 0$

إذن : $3K^{-4/5}L^{3/5} - 2 = 0$

$$3K^{-4/5}L^{3/5} = 2$$

$$L = \left[\frac{2}{3}K^{4/5}\right]^{5/3}$$

$$\therefore L = \left(\frac{2}{3}\right)^{5/3} K^{4/3}$$

وكذلك : $\frac{\partial \pi}{\partial L} = 9K^{1/5}L^{-2/5} - 1 = 0$

إذن : $9K^{1/5}L^{-2/5} = 1$

$$K = \left[\frac{1}{9}L^{2/5}\right]^{5}$$

$$\therefore K = (\frac{1}{9})^{5} L^{2}$$

وبتعويض قيمة K في L ينتج:

$$L = \left(\frac{2}{3}\right)^{5/3}\left[(\frac{1}{9})^{5} L^{2}\right]^{4/3}$$

$$L = \left(\frac{2}{3}\right)^{5/3} (\frac{1}{9})^{20/3} L^{8/3}$$

$$\frac{L}{L^{8/3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5/3} (\frac{1}{9})^{20/3}$$

$$L^{-5/3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5/3} \left(\frac{1}{9}\right)^{20/3}$$

$$L^{5/3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{5/3} (9)^{20/3}$$

$$L = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{5/3} (9)^{20/3}\right]^{3/5}$$

$$L = \frac{3}{2}(9)^4$$

$$= \frac{3}{2}(6561)$$

$$= 9841$$

ولما كانت: $K = (\frac{1}{9})^5 L^2$

وبالتعويض عن قيمة **L** بما يساويه أي **9841** فإن:

$$K = (\frac{1}{9})^5 (9841)^2$$

$$= \frac{1}{59049}(96845281)$$

$$= 1640$$

ومن النتائج أعلاه يتبين بان مستوى الإنتاج الذي يحصل عنده المنتج على أقصى الأرباح هو:

$$Q = \frac{3}{2} K^{1/5} L^{3/5}$$

$$= \frac{3}{2}(1640)^{1/5}(9841)^{3/5}$$

$$= \frac{3}{2}(4.4)(248.8)$$

$$= 1642$$

أما الأرباح فهي: $\pi = cQ - (rK + wL)$

$$\pi = 10(1642) - [(2 \times 1640) + (9841)]$$

$$= 16420 - 13121$$

$$= 3299$$

وهي الأرباح القصوى التي يحققها المنتج.

٥ـ٢٧ الكفاءة الفنية Technical Efficiency

تفترض دالة الإنتاج وجود الكفاءة الفنية أي أن جميع مستلزمات الإنتاج تستخدم بطريقة تعطي اكبر كمية من الإنتاج مقاسه بالوحدات المادية. ومن المحتمل ألا يستخدم المنتج كل أو بعض رأس المال الموجود في مصنعه وعندما يحدث هذا فإن علاقة الإنتاج بعوامل الإنتاج تكون كالآتي:

$$Q \leq Q(K, L) \qquad (5\text{-}75)$$

وهي ما يسمى بإمكانيات الإنتاج (Economic Possibilities) ولكن عندما تتحقق الكفاءة الفنية أي أن جمع عناصر الإنتاج تستخدم بطريقة تحقق أعظم إنتاج فإن العلاقة (5-75) تؤول إلى :

$$Q = Q \leq f(K, L)$$

والدالة الأخيرة تسمى بدالة الكفاءة الفنية. والآن دعنا ننظر بعلاقة الكفاءة الفنية بتعظيم العائد في الفقرة الآتية.

٥_٢٨ تعظيم العائد وحدود إمكانية الإنتاج
Maximum Revenue and Production Possibility frontier)

لو تأملنا مجتمعا ما وضع ميزانية تبلغ (M) سنوياً ووضع خطة لإنتاج وبيع سلعتين هما (x_1 , x_2) وبتوليفه تحقق له أقصى الأرباح. ولنفترض أن هذه الميزانية أنفقت على شراء المواد الأولية (عوامل الإنتاج) ومزجت هذه العوامل بطريقة تحققت فيها الكفاءة الاقتصادية[1] والكفاءة الفنية وأتاحت الميزانية فرصة إنتاج كل من (x_1, x_2) بتوليفة توصف وفق الدالة التالية كمثال:

$$M = \sqrt{x_1^2 + 16x_2^2} \qquad , x_1, x_2 > 0$$

حيث أن (x_1) هو كمية الوحدات المنتجة من السلعة الأولى سنويا، (x_2) هو كمية الوحدات المنتجة من السلعة الثانية سنوياً. حيث تظهر M دالة لكل من (x_1, x_2) وعندما تتحقق الكفاءة الاقتصادية فإن معرفة قيمة (x_1, x_2) تعطي قيمة وحيدة لـ M.

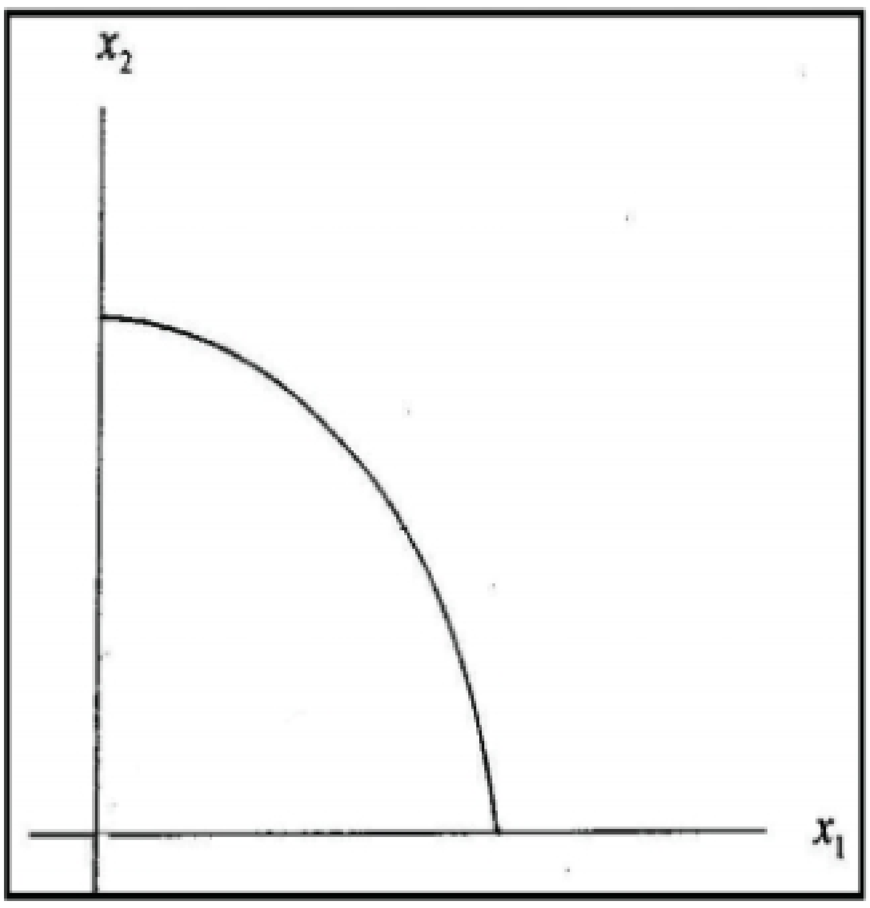
ولتوضيح هذه العلاقات دعنا نتساءل كم ينتج من (x_1, x_2) إذا كانت M=10 وسعر السلعة $x_1 = 4$ ، $x_2 = 8$ في مثالنا أعلاه.

وللجواب على ذلك نقول : ما دامت الموازنة ثابتة فإن إيجاد قيمة كل من (x_1, x_2) ممكن تحت هذه الفرضية حيث أن:

$$10 = \sqrt{x_1^2 + 16x_2^2}$$
$$100 = x_1^2 + 16x_2^2$$
$$x_2^2 = \frac{100 - x_1^2}{16}$$
$$x_2 = \frac{1}{4}(100 - x_1^2)^{1/2}$$

- [1] - الكفاية الاقتصادية $(economic\ efficiency) = \frac{\text{أجور العمل}}{\text{سعر رأس المال}} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}}$

كما مبين في الشكل رقم (5-20)



شكل رقم (٥-٢٠)

ولما كان مستوى العائدات R يعتمد على الأسعار والكميات لكل من (x_1, x_2) فإن:

$$R=4x_1+8x_2$$

والمطلوب الآن هو إيجاد قيم لكل من (x_1, x_2) التي تحقق ما يأتي:

Max $R=4x_1+8x_2$

Subject to:

$$x_2 = \frac{1}{4}(100 - x_1^2)^{1/2}$$

والآن دعنا نحل المسالة وذلك بجعل R دالة لـ (x_1) فقط:

$$R = 4x_1 + 8\left(\frac{1}{4}\right)(100 - x_1^2)^{1/2}$$

ونجد قيمة x_1 التي تعظم العائدات بإيجاد $\frac{\partial R}{\partial x_1}$ وجعلها =0

وكالآتي: لدينا: $R = 4x_1 + 2(100 - x_1^2)^{1/2}$

والآن :

$$\frac{\partial R}{\partial x_1} = 4 + 2(\frac{1}{2})(100 - x_1^2)^{-1/2}(-2x_1) = 0$$

$$4 - 2x_1(100 - x_1^2)^{-1/2} = 0$$

$$x_1(100 - x_1^2)^{-1/2} = 2$$

$$\frac{x_1}{(100 - x_1^2)^{1/2}} = 2$$

$$\frac{x_1^2}{100 - x_1^2} = 4$$

$$x_1^2 = 4(100 - x_1^2)$$

$$5x_1^2 = 400$$

$$\therefore x_1^2 = 80$$

$$\therefore x_1 = \sqrt{80} = 8.94$$

$$x_2 = \frac{1}{4}\left[100 - \left(\sqrt{80}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}(20)^{1/2}$$ و

$$= \frac{1}{4}(4.47)$$

$$\therefore x_2 = 1.12$$

أما العائدات فتساوي :

$$R = 4x_1 + 8x_2$$
$$= 4(8.94) + 8(1.12)$$
$$= 35.76 + 8.96$$
$$\therefore R = 44.72$$

من هذا الاستعراض يظهر مدى الاهتمام في كيفية إحلال إنتاج معين محل إنتاج آخر باستخدام موازنة إنفاق معينة (معلومة) بحيث يستطيع المنتج تحويل الإنفاق من إنتاج إلى آخر ويحصل على أفضل توليفة من المنتجات كما في المسألة أعلاه حيث تم الحصول على أحسن توليفة من الإنتاج (x_1, x_2). أن هذا الإحلال يدعى المعدل الحدي للإحلال بين المنتجات (**marginal rate of substitution between outputs**) والصيغة الرياضية لهذا المعدل هي نفس الصيغة المستخدمة في المعدل الحدي للإحلال الفني بين عوامل الإنتاج (MRTS) المشار إليها في الفقرة (٥-٢٢) وتكتب الصيغة أعلاه كالآتي:

$$\text{MRS} = \frac{\frac{\partial M}{\partial x_1}}{\frac{\partial M}{\partial x_2}} \quad \text{بين المنتجات}$$

حيث أن (MRS) هو المعدل الحدي للإحلال.

أما الصيغة الرياضية ل (MRS) فقد استخرجت من الآتي : ما دامت

$$M = f(x_1, x_2)$$

حيث تشير(M) إلى الموازنة.

وان التفاضل الكلي للدالة هو:

$$dM = dx_1 \frac{\partial M}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial M}{\partial x_2}$$

وعندما تكون الموازنة ثابتة أي أن $dM = 0$ فإن:

$$dx_1 \frac{\partial M}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial M}{\partial x_2} = 0$$

$$MRS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial M}{\partial x_1}}{\frac{\partial M}{\partial x_2}}$$ بين المنتجات

وفي المثال أعلاه عندما تكون $M = \sqrt{x_1^2 + 16x_2^2}$ أو $M = (x_1^2 + 16x_2^2)^{1/2}$

فإن:

$$\frac{\partial M}{\partial x_1} = \frac{1}{2}(x_1^2 + 16x_2^2)^{-1/2}(2x_1)$$

$$= x_1(x_1^2 + 16x_2^2)^{-1/2}$$

و

$$\frac{\partial M}{\partial x_2} = \frac{1}{2}(x_1^2 + 16x_2^2)^{-1/2}(32x_2)$$

$$= 16x_2(x_1^2 + 16x_2^2)^{-1/2}$$

وبذلك يكون:

$$MRS = -\frac{\frac{\partial M}{\partial x_1}}{\frac{\partial M}{\partial x_2}} = -\frac{x_1(x_1^2 + 16x_2^2)^{-1/2}}{16x_2(x_1^2 + 16x_2^2)^{-1/2}}$$

$$= -\frac{x_1}{16x_2}$$

وفي الحالة التي نحن بصددها عندما تكون M=10 و $x_2 = \frac{1}{4}(100 - x_1^2)^{1/2}$ فإن:

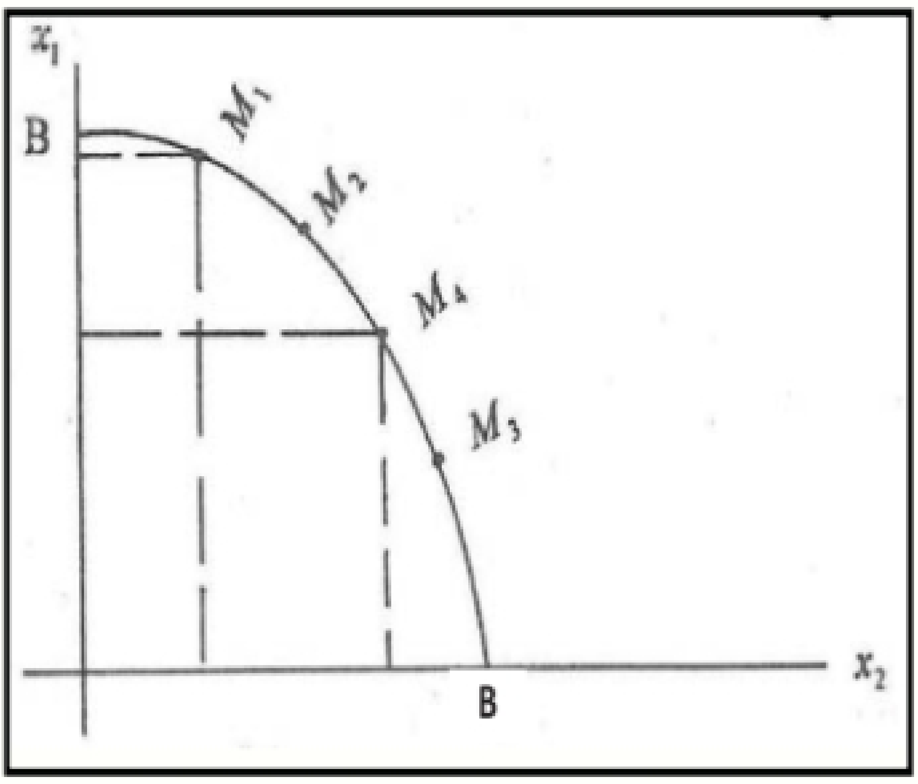
$$MRS = -\frac{x_1}{16x_2} = -\frac{x_1}{4}(100 - x_1^2)^{-1/2}$$

إن مثل هذه الدوال مفيدة في الاقتصاد الكلي لكونها تعطي فكرة واضحة عن المقارنة بين السلعة الآن والسلع في المستقبل كان تكون السلعة x_1 هي الاستهلاك الكلي في الوقت الحاضر و x_2 هي الاستثمار الكلي لغرض أنتاجها في المستقبل. وكذلك تفيد في المقارنة بين الخيارات بين السلع المنتجة في القطاع العام أو تلك المنتجة في القطاع الخاص. فإذا صنفت جميع السلع بصنفين هما (x_1, x_2) وجميع المستلزمات وضعت في (M) والتي تمثل الإمكانيات المتوفرة للإنتاج فإن الدالة $M = f(x_1, x_2)$ حيث أن $(x_1, x_2 > 0)$. تؤشر لنا حدود إمكانية الإنتاج (production possibility frontier) حيث تظهر مجموعة التراكيب بين (x_1, x_2) الممكنة والتي تمثل مجموعة ممكنات الإنتاج (production possibilities). كما في الشكل (5-20).

وعندما يصنف إنتاج المجتمع إلى سلعتين سوف لا يكون هناك سوق سعرية بهذه البساطة يحدد لنا سعر كل منهما وفي حالة كهذه يلجأ متخذو القرارات إلى البيانات التي تقدم أوزانا" نسبية لكل سلعة حيث تسهل عملية وضع مثل هذه الأوزان التعامل مع الكميات التجمعية والكميات المقربة. ومن ذلك يمكن أن يقال بان المجتمع ينتج بكفاءة عندما يكون ضمن حدود إمكانية الإنتاج وعندما:

$$MRS = -\frac{\frac{\partial M}{\partial x_1}}{\frac{\partial M}{\partial x_2}} = -\frac{w_1}{w_2}$$

حيث أن $\frac{w_1}{w_2}$ تمثل الأوزان النسبية التي تعطى للسلعتين (x_1, x_2) .وكما في الشكل (5-21):



شكل رقم (٢١-٥)

تمارين (٧-٥)

إذا كانت لدينا دالة إنتاج من النوع كوب -دوكلاص وبالصيغة الآتية :

$$Q = 7K^{\frac{1}{5}}L^{\frac{4}{5}}$$

أثبت باستخدام هذه الدالة الخصائص الستة التي تتميز بها هذه الدالة.

إذا أعطيت دالة من نوع (CES) الآتية :

$$Q = 2\left[5K^{-3} + (1+\alpha)L^{-3}\right]^{1/3}$$

والمطلوب استخراج :

متوسط التكاليف.

الإنتاج الحدي لكل من (K , L).

إذا كانت دالة الإنتاج في أحدى المشاريع الزراعية من النوع الآتي:

$$Q = \frac{3}{7}K^{1/3}L^{1/2}$$

جد مستوى الإنتاج الذي عنده يحقق المنتج أقصى الأرباح أذا علمت بأن سعر الوحدة الواحدة من الإنتاج (C= 15) ومعدل الأجور (W = 5) ومعدل أيجار المكائن (r= 6).

وضع مجتمع خطة لإنتاج سلعتين بتوليفه تحقق له أقصى الأرباح وهيأ ميزانية لهذا الغرض تبلغ (30) وقد حرص المسؤولون عن الخطة تحقق كل من الكفاءة الاقتصادية والكفاءة الفنية وصمموا الدالة الآتية لهذا الغرض :

$$M = x_1^{\ 3} + 4x_2$$

حيث تشير كل من (x_1, x_2) إلى السلعتين المزمع إنتاجها وقام جهاز التسويق بتحديد الأسعار المتوقعة لبيع هاتين السلعتين :

$$(x_1 = 7, x_2 = 10)$$

والمطلوب استخراج كل من (x_1, x_2) الذين يحققان أقصى الأرباح.